中央研究院民族學研究所集刊
第41期 頁 1-23 民國65年春季

雙方交表婚制的數理結構*

劉　斌　雄

組構雙方交表婚連婚圈的繼嗣羣體數 p 爲偶數 $2n$ 且 $n \geq 1$ 時，其父系 (m) 及母系 (f) 的世代循環原則上均由 p 世代循環所支配，分節數卽爲 p^2。若繼嗣羣爲父系而其世代循環數定爲 q 而 $p \fallingdotseq q$ 時，分節數爲 pq，母系世代循環數爲 p 與 q 的最小公倍數 r，或者兩者相反。其關係式爲

1　$p=2n$: $\mathrm{m}^p=\mathrm{f}^p=(\mathrm{mf})^2=\mathrm{I}$

2　$p=2n$: $\mathrm{m}^q=\mathrm{f}^r=(\mathrm{mf})^2=\mathrm{I}$

若 p 爲奇數 $2n+1$ 時，父系世代循環數爲 $2n(n+1)$，母系世代循環數右旋廻者 (f_1) 爲 $n(2n+1)$，左旋廻者 (f_2) 爲 $(n+1)(2n+1)$。其關係式爲

3　$p=2n+1$: $\mathrm{m}^{2n(n+1)}=\mathrm{f}_1{}^{n(2n+1)}=\mathrm{f}_2{}^{(n+1)(2n+1)}=(\mathrm{mf})^2=\mathrm{I}$

Kariera, Ambrym 及 Arunta 等常見的雙方交表婚制均採用互隔世代的原則，故其一般關係式爲

4　$q=2$: $\mathrm{m}^2=\mathrm{f}^p=(\mathrm{mf})^2=\mathrm{I}$

關於制定婚親屬制度 (prescriptive marriage system) 的探討，筆者曾提出下面的三個原則或作業假設作爲建構分組制度的理論依據：

(1) 母方交表婚制，卽姑表兄弟/舅表姊妹婚制，由 n 世代循環之法則所支配，若其婚姻循環或連婚圈由 n 個繼嗣單位所構成時，n 的最小數爲 3 。

(2) 在同一條件下，父方交表婚制，卽舅表兄弟/姑表姊妹婚制，由隔代同組或互隔世代的 2 世代循環之法則所支配。

(3) 雙方交表婚制，則由上述的二個法則，卽 “n 世代循環” 及 “互隔世代” 之法則所組合支配，在這個場合，n 爲 2 或大於 2 的數目(劉斌雄 1969:30–31)。

其中有關母方交表婚制的作業假設，根據孟根親屬制度的分析而改正如下：

母方交表婚制、卽姑表兄弟/舅表姊妹婚制，原則上由 n 世代循環之法則所支配，若其婚姻循環或連婚圈由 n 個繼嗣單位所構成時，n 的最小數爲 3 。又，組成連

本文於民國66(1977)年1月出版
* 本論文獲行政院國家科學委員會獎助，特致謝意。

婚圈之繼嗣單位其世代循環數被定爲 p，並且 $p \geq 1$ 時，另一繼嗣線(若前者爲父系線，後者即爲母系線，或者兩者相反）的世代循環數將被定爲 q, q 是 n 與 p 的最小公倍數 (ibid: 68)。

同時，依據系譜空間理論，我們採用父子連繫m和母子連繫 f 爲母數，各分節由其連積 (product) 來表示。以母方交表婚連婚圈各分節爲元的集合，具有有限可換羣的數理性質，可用下面的羣理論關係式 (group-theoretic relation) 來表示：

(1) $m^p = I$　　(2) $f^q = I$　　(3) $mf = fm$

關係式 (1) 表示父系循環，(2) 表示母系循環，(3) 表示母方交表婚特有的性質，同時也表示二元運算的可換性。

本文，根據系譜空間理論繼續討論雙方交表婚制的數理結構，同時以 Kariera, Ambrym 及 Arunta 等實存社會的諸例，檢驗其特性。

一、KARIERA 型連婚圈結構

首先，我們以兩個遊羣 (horde) 或兩個外婚單位 (exogamous unit) 所形成的最單純的連婚圈 (circulating connubium)，也就是以 Kariera 型來探討雙方交表婚制的數理結構模式。我們採用不分性別的系譜線 (sex-ignored genealogical line) 來表示連婚關係，實線表示父子連繫 (father-child link)，虛線表示母子連繫 (mother-

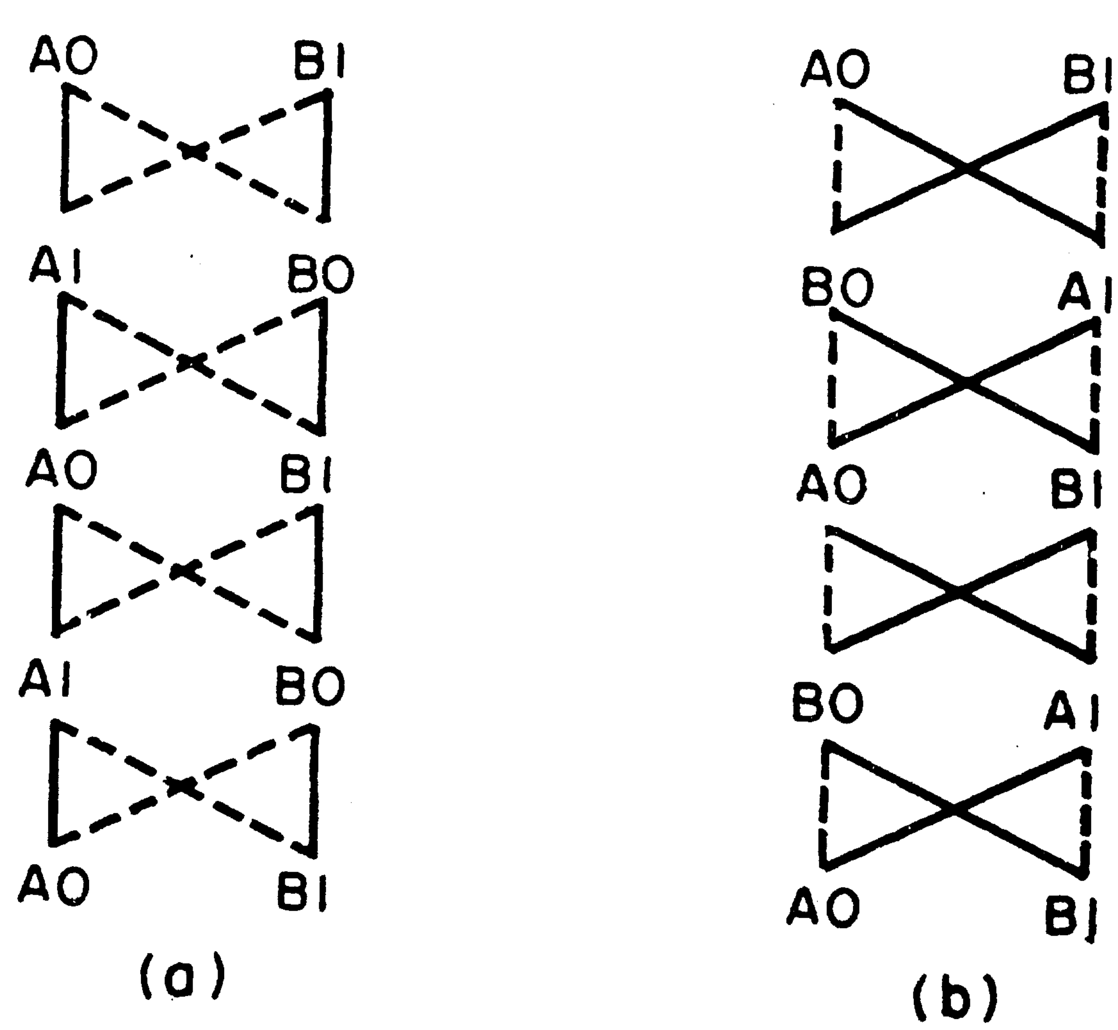
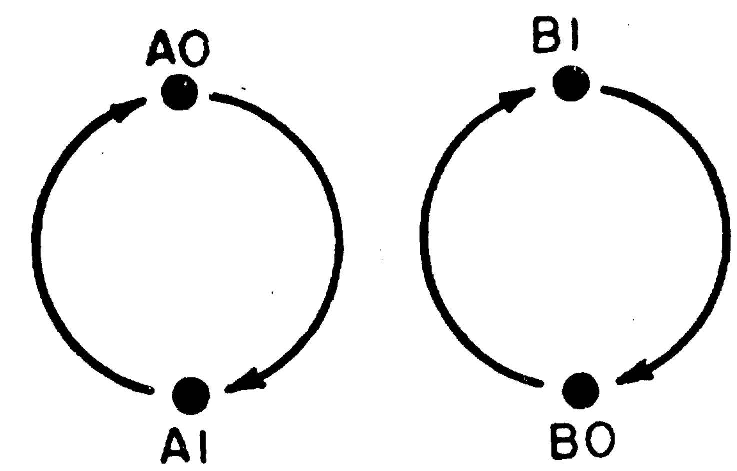


Figure 1. KARIERA Type Circulating Connubium
(Many-to-one graph)

child link)。我們稱兩個遊羣爲 A 和 B，並以此來代表兩條父系線（patri-line），兩條母系線（matri-line）即由 0 和 1 來代表。各分節（segment）以父系及母系符號的組合來表示。其婚姻方式規定在各世代（generation）兩個遊羣間舉行直接交換婚（direct exchange marriage）。這種制定婚制使嫁娶的對象固定於特殊的親屬類型，即於 á+â+a−ă−à 之間。換句話說，婚姻介於第一交表 $_m$FZS 與 $_m$MBS 之間的姊妹交換婚，或者 $_m$FZD/$_f$MBS，$_m$MBD/$_f$FMS 婚。

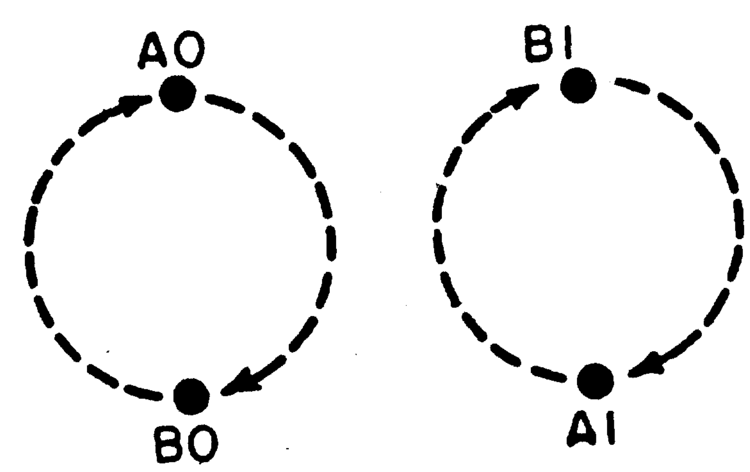
圖一表示 KARIERA 型連婚圈的多對一圖示（many-to-one graph），a 以父系，b 以母系爲主線的情形。圖中，兩條父系線均由兩條母系線相互交切而產生 A0、A1、B0、B1 四個分節，並作有規律的循環。兩組父系循環（patri-cycle）爲：

$$A0 \longrightarrow A1 \longrightarrow A0$$
$$B1 \longrightarrow B0 \longrightarrow B1$$



兩組母系循環（matri-cycle）爲：

$$A0 \cdots\!\rightarrow B0 \cdots\!\rightarrow A0$$
$$B1 \cdots\!\rightarrow A1 \cdots\!\rightarrow B1$$



下面，各分節間的關係用二個母數（generator）m 和 f 說明之。m 表示實線的父子連繫，f 表示虛線的母子連繫，各分節即可用 m，f 的連積（product）來表示。Ego (I) 可以位於四個分節中的任何一個，若設 ego 於 A0，即 A0=I，然後以此分節爲起點而分向各分節出發，我們便可得到下面的關係式：

$$A0=I=m^2=f^2=m^4=f^4=m^2f^2=f^2m^2=mf^2m=fm^2f=\cdots$$
$$=m^{-2}=f^{-2}=m^{-4}=f^{-4}=mm^{-1}=m^{-1}m=ff^{-1}=f^{-1}f=\cdots$$
$$A1=m=m^{-1}=m^3=m^{-3}=f^2m=f^{-2}m=f^2m^{-1}=f^{-2}m^{-1}=\cdots$$
$$B0=f=f^{-1}=f^3=f^{-3}=m^2f=m^{-2}f=m^2f^{-1}=m^{-2}f^{-1}=\cdots$$
$$B1=mf=fm=m^{-1}f=mf^{-1}=m^{-1}f^{-1}=f^{-1}m=fm^{-1}=f^{-1}m^{-1}$$
$$=m^3f=m^3f^{-1}=m^{-3}f=m^{-3}f^{-1}=\cdots$$

其中，m^{-1} 爲 m 的反數 (inverse)，卽表示子父連繫 (child-father link)，f^{-1} 爲 f 的反數，卽表示子母連繫 (child-mother link)。

由上面的諸關係，我們可以歸納出下面的三個基本關係式(group-theoretic relation)：

(1)　$m^2=I$　　(patri-cycle)

(2)　$f^2=I$　　(matri-cycle)

(3)　$mf=fm$ or $mfmf=I$　　(marriage distance)

根據這些法則，由 m，f 的任何連積所構成的長符號 (long string) 均可簡化成列於各分節最前面的最短符號 (shortest string) $f^i m^j$，我們稱之爲各分節的焦點(focus)。例如：

$$fmfmfmf = mffmmff \qquad (代入第三法則)$$

$$= m \qquad (代入第一、二法則)$$

長符號 fmfmfmf 屬於 m 分節內。

各分節的數字符號可採用焦點 f^i m^j 之冪數的 ij 値來命名之。四個分節的焦點與其數字符數的對照如下：

S00 (I)　S01 (m)　S10 (f)　S11 (fm)

圖二是 KARIERA 型連婚圈的一對一圖示 (one-to-one graph)，各分節用焦點符號來表示之。

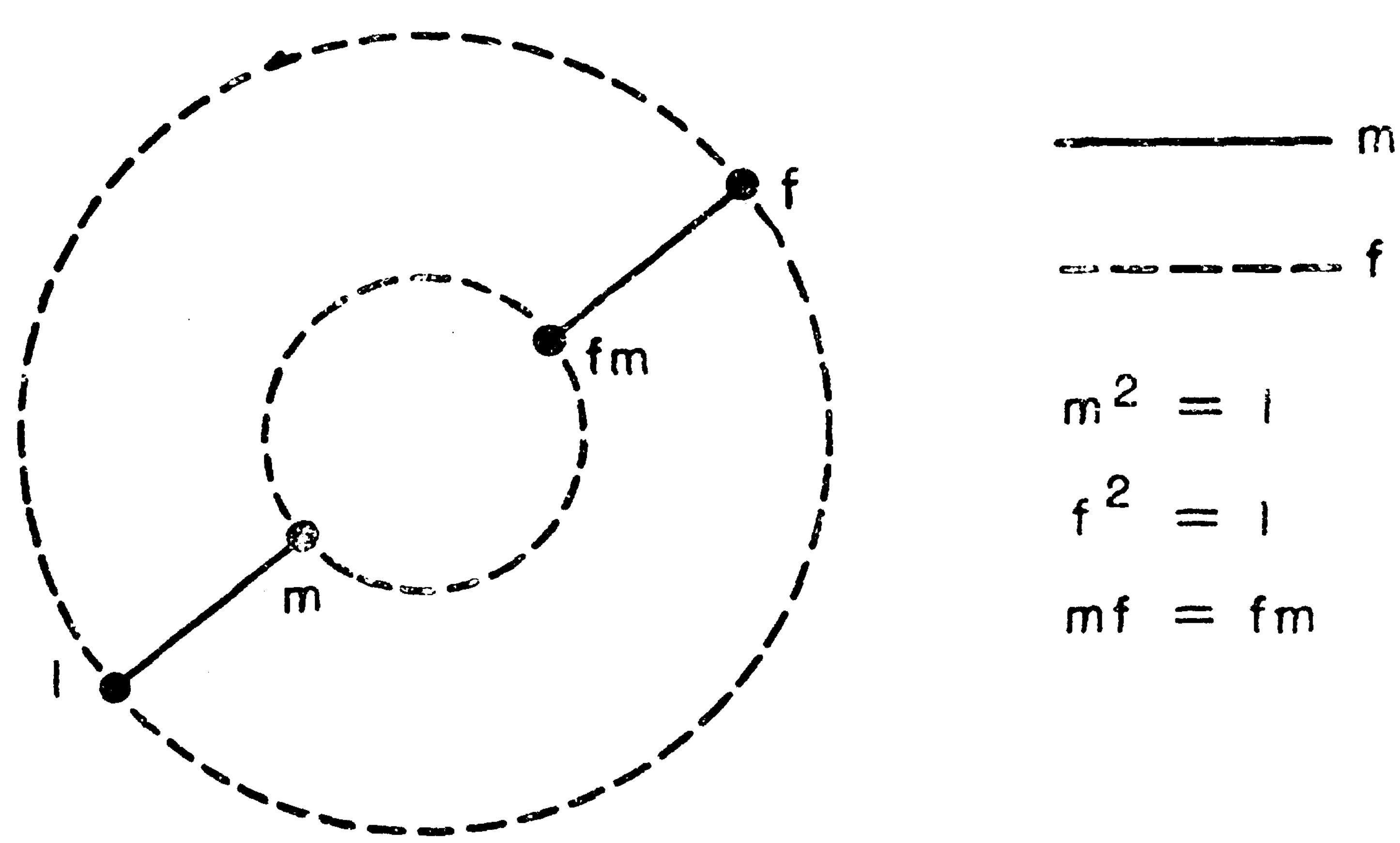


Figure 2. KARIERA Type Circulating Connubium
(one-to-one graph)

設運算符號以"⊗"表示,我們可以製定一運算表如下:

⊗	S00	S01	S10	S11
S00	S00	S01	S10	S11
S01	S01	S00	S11	S10
S10	S10	S11	S00	S01
S11	S11	S10	S01	S00

根據運算表,我們發現幾個代數性質:

(1) 這是一個四元的內運算 (closure).

(2) "⊗" 為結合運算 (associative).

$$
\begin{aligned}
S10 \otimes S11 \otimes S01 &= (S10 \otimes S11) \otimes S01 \\
&= S10 \otimes (S11 \otimes S01) \\
&= S00
\end{aligned}
$$

(3) "⊗" 為交換運算 (commutative).

$$
\begin{aligned}
S11 \otimes S10 &= S10 \otimes S11 \\
&= S01
\end{aligned}
$$

(4) 有單位元素 (unit element) "S00".

$$
\begin{aligned}
S01 \otimes S00 &= S00 \otimes S01 \\
&= S01
\end{aligned}
$$

(5) 有反元素 (inverse).

$S11 \otimes S11 = S00$　　即各元為正反同型 (self-inverse)。

合乎這幾個條件,我們便可以說這四元的集合形成"交換羣 (commutative group)"或"阿伯羣(Abelian group)"。

綜上所述,可知連婚圈由兩個外婚單位或遊羣所構成,而代代舉行雙方交表婚或直接的姊妹交換婚時,由於兩條父系線和兩條母系線的交切,產生四個分節,其集合形成阿伯羣,即與著名的 Klein's four elements group 同構。

二、AMBRYM 型連婚圈結構

在雙方交表婚制裏,由三個遊羣或外婚單位來建構連婚圈的例子,曾見於Ambrym島民之間 (Deacon 1927)。下面,我們按照圖三所示,來探討其結構的數理模式。

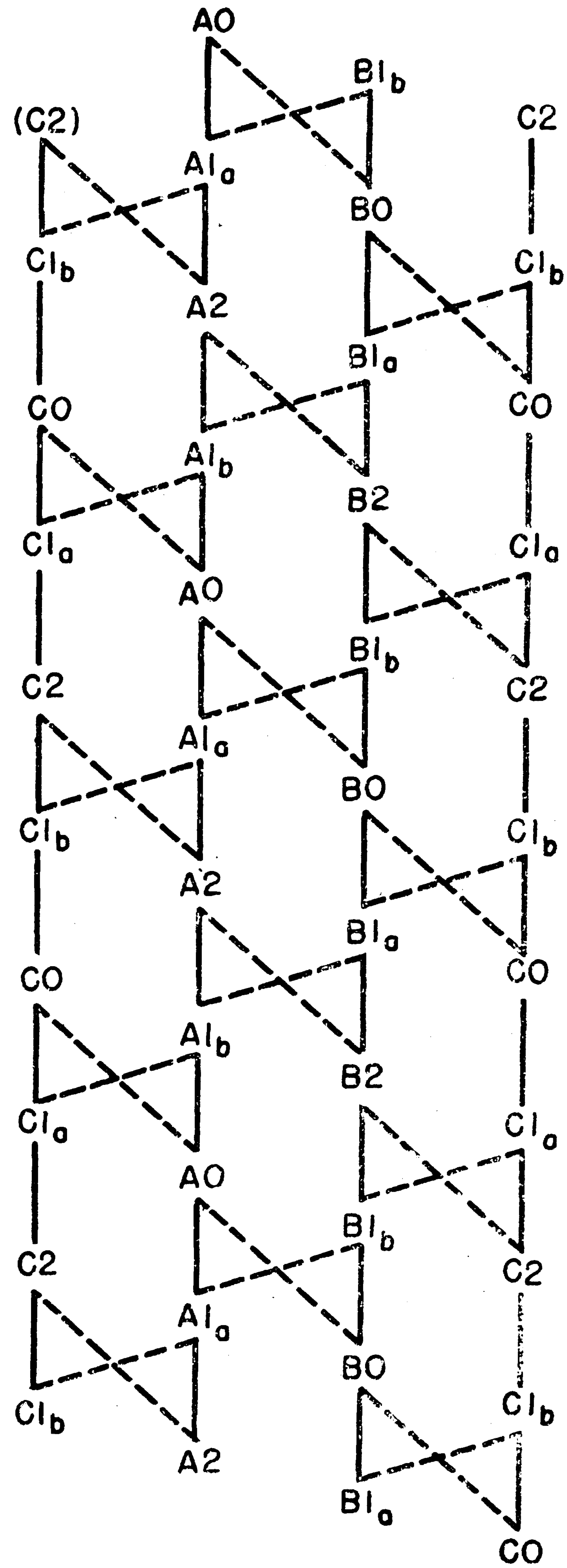


Figure 3. Three-horde Circulating Connubium
(many-to-one graph)

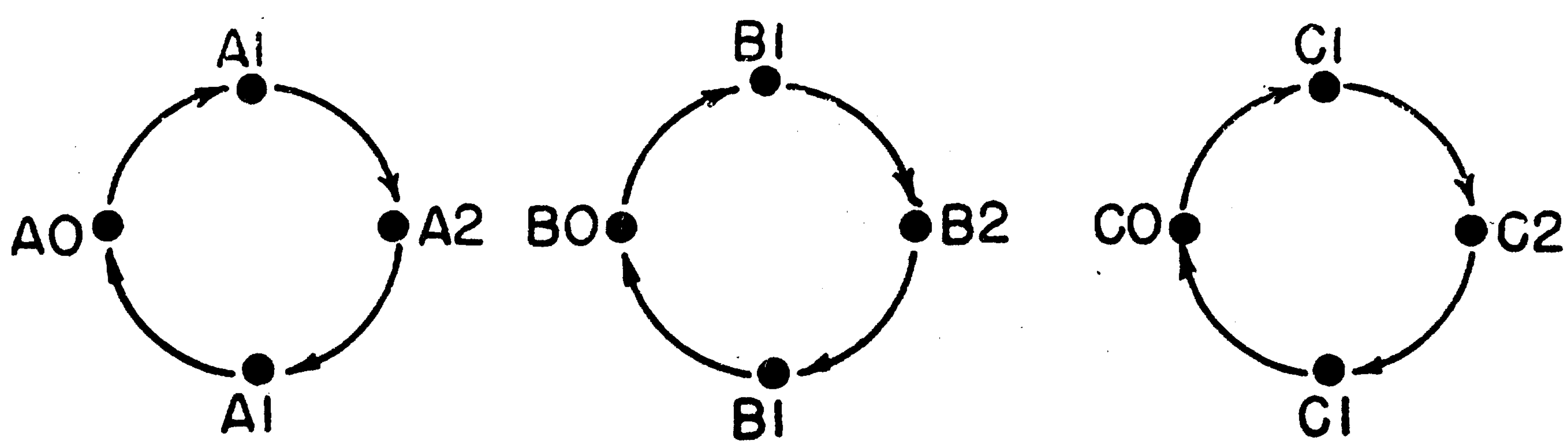
我們命名三個遊羣爲 A、B、C，並以此來代表三條父系線。至於隱藏於遊羣之間的三條母系線，則以 0 、 1 、 2 三個符號來表示。各分節用父系及母系符號的組合來表

示，並設各遊羣的第一世代分節定名爲 A0, B1, C2 等。其婚姻的方式，按照下面的步驟擧行之。首先，規定在分節A0和B1之間直接擧行姊妹交換婚，其下一代各爲 A1 與 B0，其間的婚姻被禁止。A1 與 C2 交換姊妹通婚，其下一代爲 A2 和 C1，並禁止其間的婚姻。B0 與 C1 交換婚，其下一代爲 B1 與 C0，禁止其間的婚事如前。其次，A–B 之間回復通婚，卽 A2 與 B1 之間擧行交換婚，其下一代爲 A1 與 B2。如此，婚姻在 B–A, A–C, C–B, B–A, A–C, C–B, B–A, … 之間有規則的輪流擧行時，將使嫁娶的對象限定於特殊的親屬類型，卽定於 á+m+ă+ȧ−â−f−à 之間。三條母系線中，0 和 2 與父系線按英文字母的順序交切，我們稱之爲右旋廻母系線；母系線 1 卽與父系線於逆英文字母的順序交切，我們稱之爲左旋廻母系線。圖中，三條父系線的世代循環如是：

$$A0 \longrightarrow A1 \longrightarrow A2 \longrightarrow A1 \longrightarrow A0$$

$$B0 \longrightarrow B1 \longrightarrow B2 \longrightarrow B1 \longrightarrow B0$$

$$C0 \longrightarrow C1 \longrightarrow C2 \longrightarrow C1 \longrightarrow C0$$

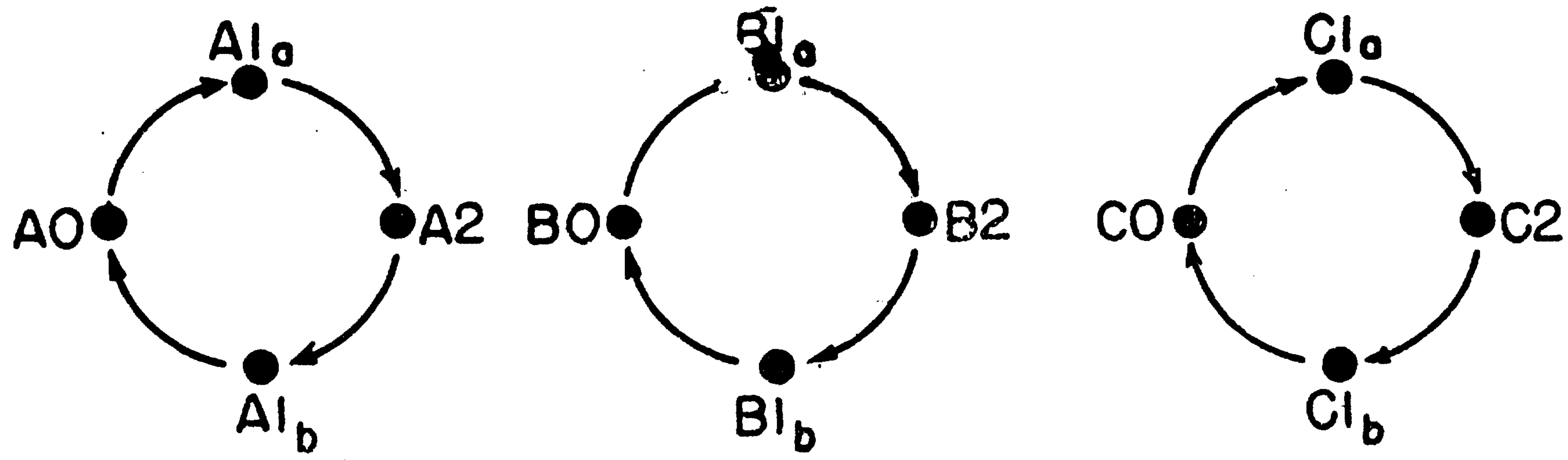


其中，A1、B1、C1 在各線各出現二次，我們用 A1a、A1b、B1a、B1b、C1a、C1b 來區別之。三條父系線的世代循環可以改寫爲：

$$A0 \longrightarrow A1a \longrightarrow A2 \longrightarrow A1b \longrightarrow A0$$

$$B0 \longrightarrow B1a \longrightarrow B2 \longrightarrow B1b \longrightarrow B0$$

$$C0 \longrightarrow C1a \longrightarrow C2 \longrightarrow C1b \longrightarrow C0$$

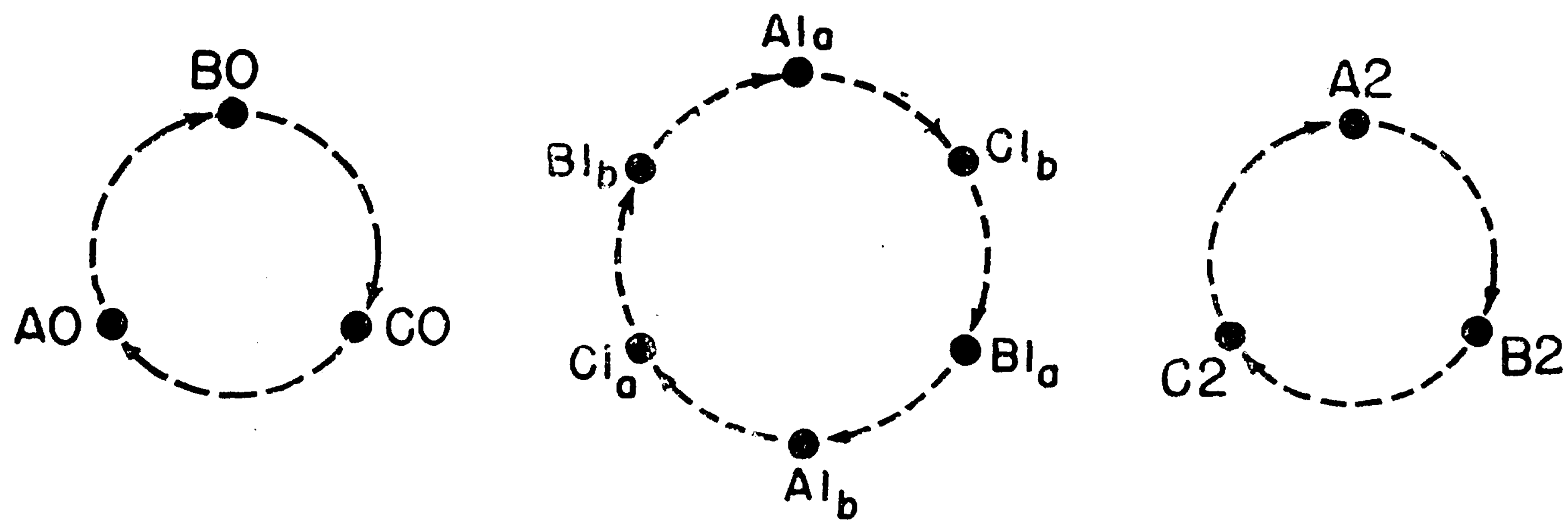


三條母系線的世代循環爲：

A0⋯→B0⋯→C0⋯→A0

B1b⋯→A1a⋯→C1b⋯→B1a⋯→A1b⋯→C1a⋯→B1b

C2⋯→A2⋯→B2⋯→C2



如此，三條父系線（A, B, C）均做四世代循環，右旋廻的母系線（0, 2）做三世代循環，左旋廻的母系線（1）卽做六世代循環。各種世系線的循環不同，實由斜代婚姻所引起。因三條父系線各行四世代循環而產生的十二個分節，若原點設於 A0，各分節與其焦點的對照如下：

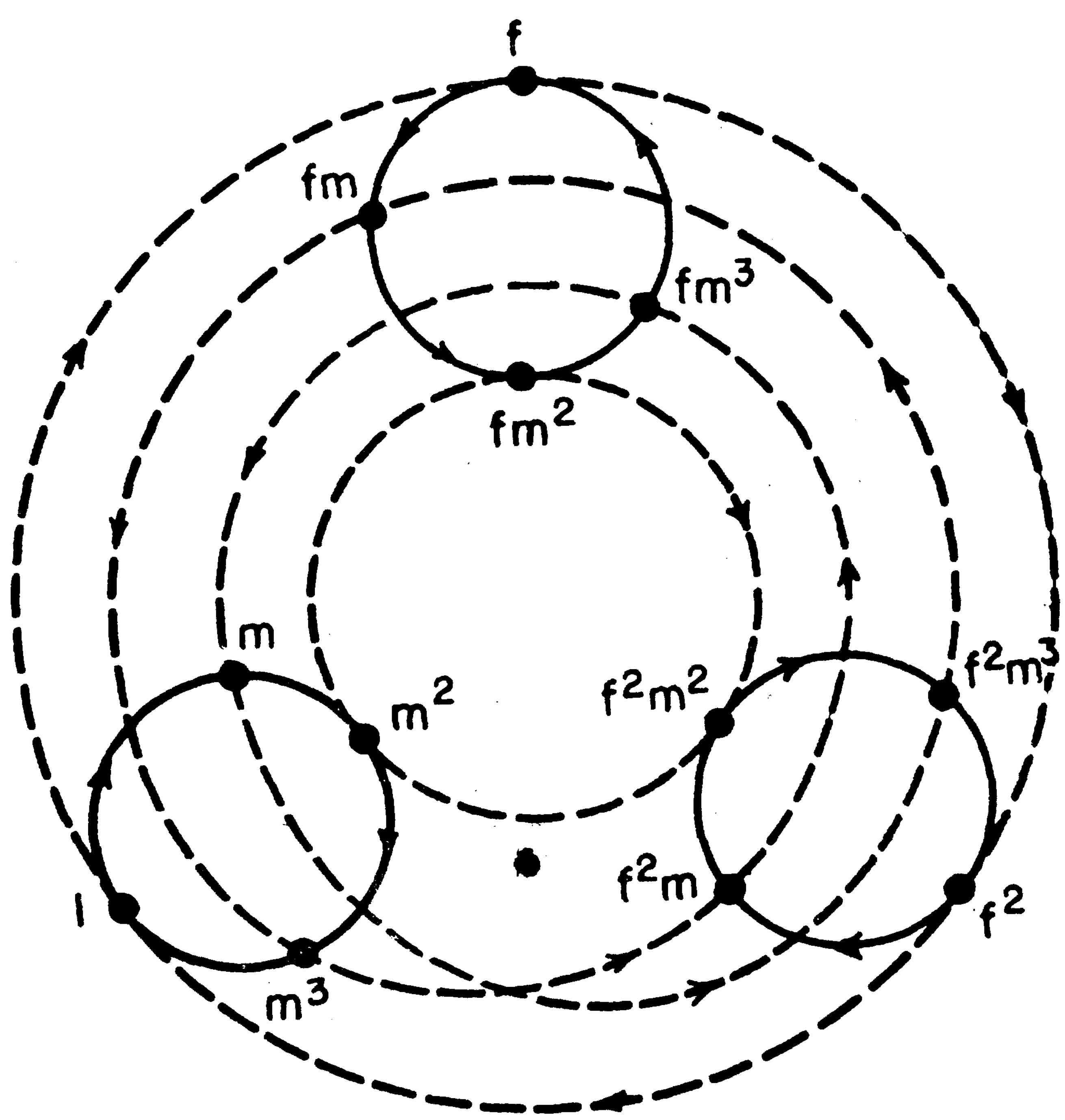


Figure 4. 3-horde Circulating Connubium (Ideal type)
(One-to-one graph)

A0 (I)	A1a (m)	A2 (m^2)	A1b (m^3)
B0 (f)	B1a (fm)	B2 (fm^2)	B1b (fm^3)
C0 (f^2)	C1a (f^2m)	C2 (f^2m^2)	C1b (f^2m^3)

圖四是十二個分節的一對一圖示，母系線右旋廻者按時鐘的方向循環，左旋廻者逆此而循環。在父系線，同樣的 A, C 同方向，B 即逆此而循環。

各種世系線(父系線，右旋廻母系線，左旋廻母系線)的世代循環及配偶的親屬距離是有規則性的，可用下面的幾個關係式來表示。

(1)	$m^4=I$	(patri-cycle)
(2)	$f^3=I$	(matri-cycle, right circulation)
(3)	$f^6=I$	(matri-cycle, left circulation)
(3′)	$f^3=m^2$	($f^6=m^4$)
(4)	$m^3=fmf$	($_f$FMBSS/$_m$FFZSD marriage)
(5)	$fm^2=m^2f$	($_f$FFZSD/$_m$FMBSD marriage)

任何長度的符號均可用這些關係式來簡化成為所與焦點之一。至於母系循環採用右旋廻或左旋廻者，由 f 前面的 m 的數目而決定。若 m 的數目為偶數時，f 採用右旋廻母系循環；m 的數目為奇數時，f 採用左旋廻母系循環。例如

a) $fmfffmffm=fmmmmffm$ (3′)
$=fffm$ (1)
$=m$ (2)

b) $fmffmmfffmmffm=mmmmmffffmmffm$ (4) (5)
$=mmmmmfffm$ (1) (3′) (5)
$=mfffm$ (1)
$=mmmm$ (3′)
$=I$ (1)

設各焦點以 f^im^j 為其基本形式，各分節的數字符號即可採用冪數的 ij 值來命名。十二個分節的數字符號如下：

S00 (I)	S01 (m)	S02 (m^2)	S03 (m^3)
S10 (f)	S11 (fm)	S12 (fm^2)	S13 (fm^3)
S20 (f^2)	S21 (f^2m)	S22 (f^2m^2)	S23 (f^2m^3)

以數字符號爲元的十二個分節的集合，其二元運算（binary operation）可按照下面的公式行之。

$$\text{(i)}\quad Sx_1\overset{\blacktriangle}{y}_1 \otimes Sx_2y_2 = S(x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

$$\text{(ii)}\quad Sx_1\overset{\blacktriangledown}{y}_1 \otimes S\overset{\blacktriangle}{x}_2y_2 = S(x_1-x_2)(y_1+y_2)$$

$$\text{(iii)}\quad Sx_1\overset{\blacktriangledown}{y}_1 \otimes S\overset{\blacktriangledown}{x}_2y_2 = S(x_1-x_2)(y_1+y_2+2)$$

▲ 表示偶數

▼ 表示奇數

根據此，我們可得下面的十二元的運算表。

⊗	S00	S01	S02	S03	S10	S11	S12	S13	S20	S21	S22	S23
S00	S00	S01	S02	S03	S10	S11	S12	S13	S20	S21	S22	S23
S01	S01	S02	S03	S00	S23	S20	S21	S22	S11	S12	S13	S10
S02	S02	S03	S00	S01	S12	S13	S10	S11	S22	S23	S20	S21
S03	S03	S00	S01	S02	S21	S22	S23	S20	S13	S10	S11	S12
S10	S10	S11	S12	S13	S20	S21	S22	S23	S00	S01	S02	S03
S11	S11	S12	S13	S10	S03	S00	S01	S02	S21	S22	S23	S20
S12	S12	S13	S10	S11	S22	S23	S20	S21	S02	S03	S00	S01
S13	S13	S10	S11	S12	S01	S02	S03	S00	S23	S20	S21	S22
S20	S20	S21	S22	S23	S00	S01	S02	S03	S10	S11	S12	S13
S21	S21	S22	S23	S20	S13	S10	S11	S12	S01	S02	S03	S00
S22	S22	S23	S20	S21	S02	S03	S00	S01	S12	S13	S10	S11
S23	S23	S20	S21	S22	S11	S12	S13	S10	S03	S00	S01	S02

這張運算表所顯示的數理性質如下：

(1) 這是一個十二元的內運算。

(2) 有單位元 S00 的存在，與任何其他元做二元運算時，使其數值不變。如：

$$S00 \otimes S13 = S13 \otimes S00 = S13$$

(3) 既然單位元 S00 很清楚地在各"行(column)"及"列(row)"上出現一次，有關羣論的"反元公理(axiom of inverse)"可被滿足之。例如：

$S22 \otimes S12 = S00$ 時

$S22^{-1} = S12$ 或 $S12^{-1} = S22$

即 S22 與 S12 有反元關係。

但，任何三個元連續運算時，不一定滿足結合之公理，例如：

$$(S03 \otimes S12) \otimes S20 = S23 \otimes S20 = S03$$

$$S03 \otimes (S12 \otimes S20) = S03 \otimes S02 = S01$$

又,任何二個元做運算時,也不一定會滿足交換之公理,例如:

$$S21 \otimes S12 = S11$$

$$S12 \otimes S21 = S03$$

本集合，因不能滿足結合和交換的公理，即不具結合性及交換性，故不能稱之為"羣"或"阿伯羣",但其具有單位元,反元等特性,加以運算表之第一行與第一列完全相等,基於此,我們可稱之為十二元所構成的"準羣(groupoid)"。

至於任何長符號的簡化,可轉換為一連串數字符號的運算。

例如:

a) $\text{fmfffmffm} = S11 \otimes S20 \otimes S11 \otimes S21$
$= S21 \otimes S11 \otimes S21$
$= S10 \otimes S21$
$= S01$

b) $\text{fmffmmfffmmffm} = S11 \otimes S22 \otimes S20 \otimes S12 \otimes S21$
$= S23 \otimes S20 \otimes S12 \otimes S21$
$= S03 \otimes S12 \otimes S21$
$= S23 \otimes S21$
$= S00$

上面的分析,探討三個遊羣或外婚單位嚴格的舉行雙方交表婚時,自然產生的理想形態 (ideal type)。在現存的民族誌資料裏,只有 Ambrym 島民實行這種婚姻制度。Deacon (1927:325–242) 所報告的 Ambrym 制度與上述理想形態唯一不同的地方,是構成連婚圈的三個父系外婚單位,各分屬於二個分節或分組 (section)。

茲設三個外婚單位為 A、B、C, A 分屬於 P、Q, B 分屬於 R、S, C 分屬於 T、U 等分組;姊妹交換婚舉行於分組 P 與 R, Q 與 T 及 S 與 U 之間時,其連婚圈組織可用圖五諸圖來表示。

該圖 (a) 部分與前述圖三是同樣表示三個遊羣的連婚圈結構，兩者間唯一的不同

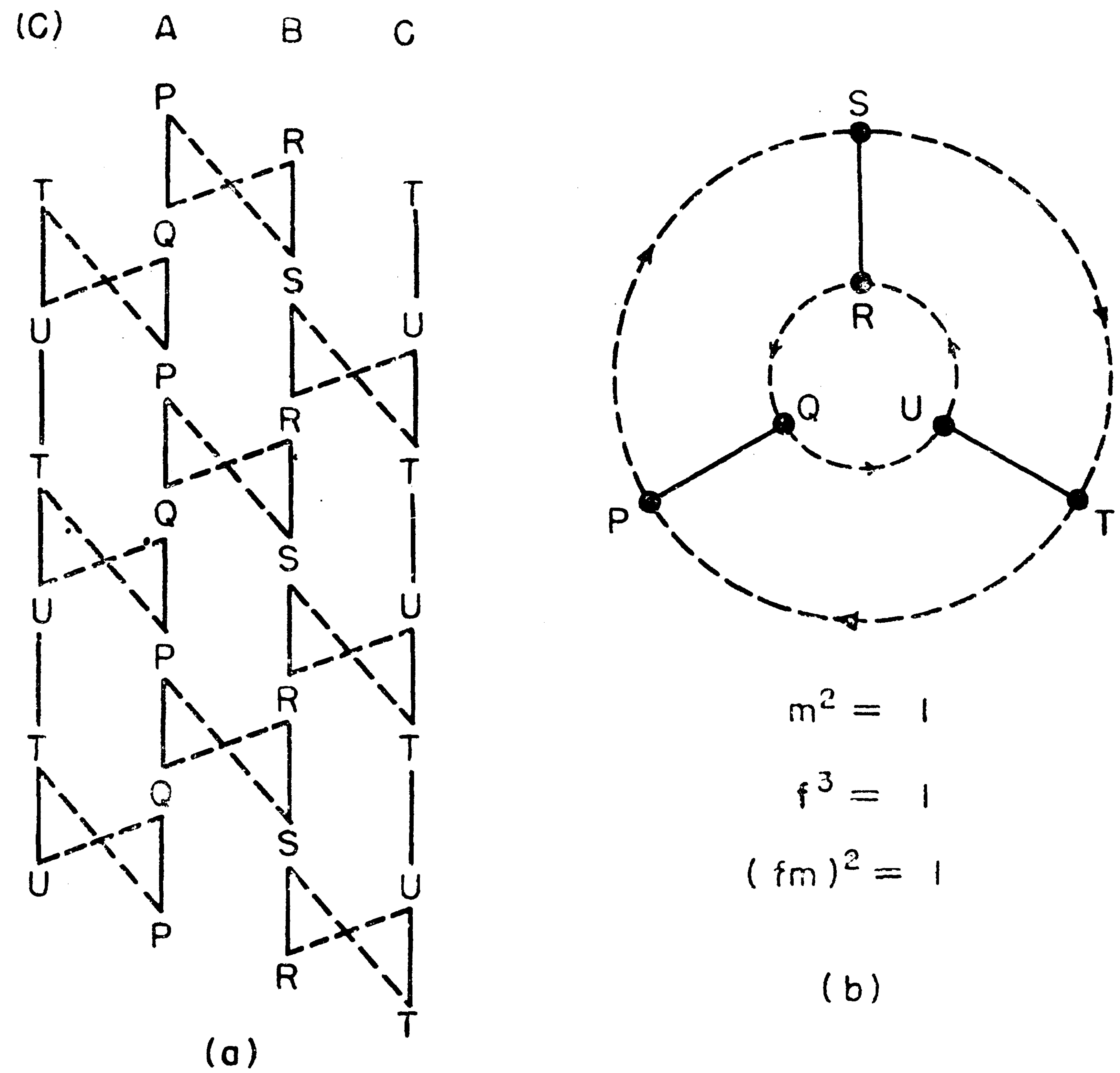
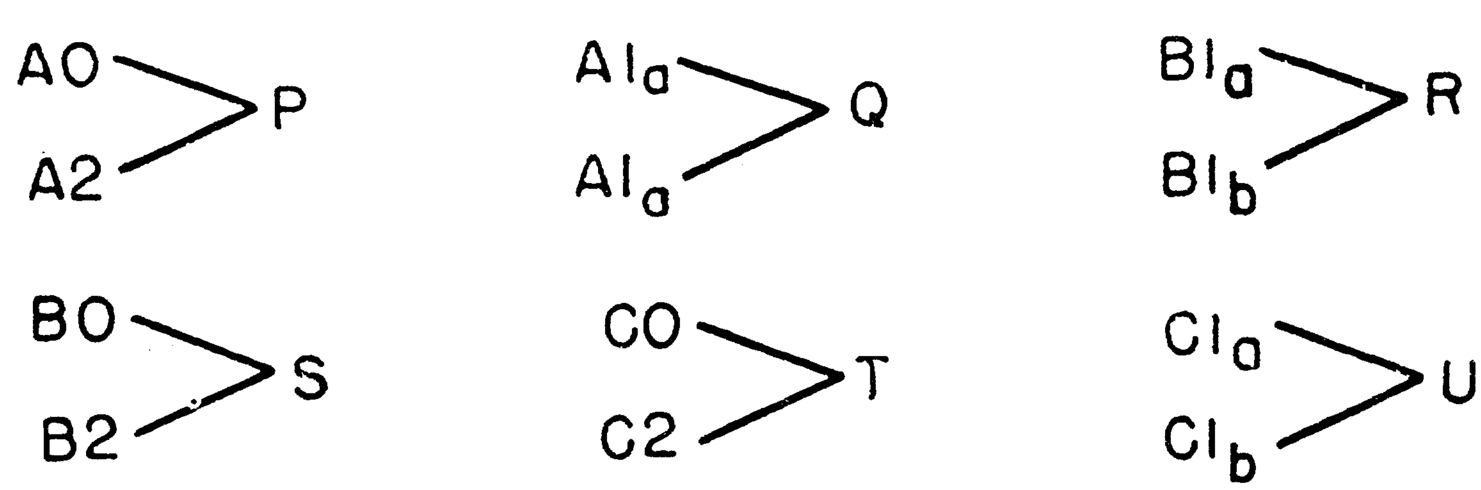


Figure 5. Ambrym Type Circulating Connubium
(a) Many-to-one graph
(b) One-to-one graph

處在於採用不同分節符號系統。兩組符號的對照，列於下面：



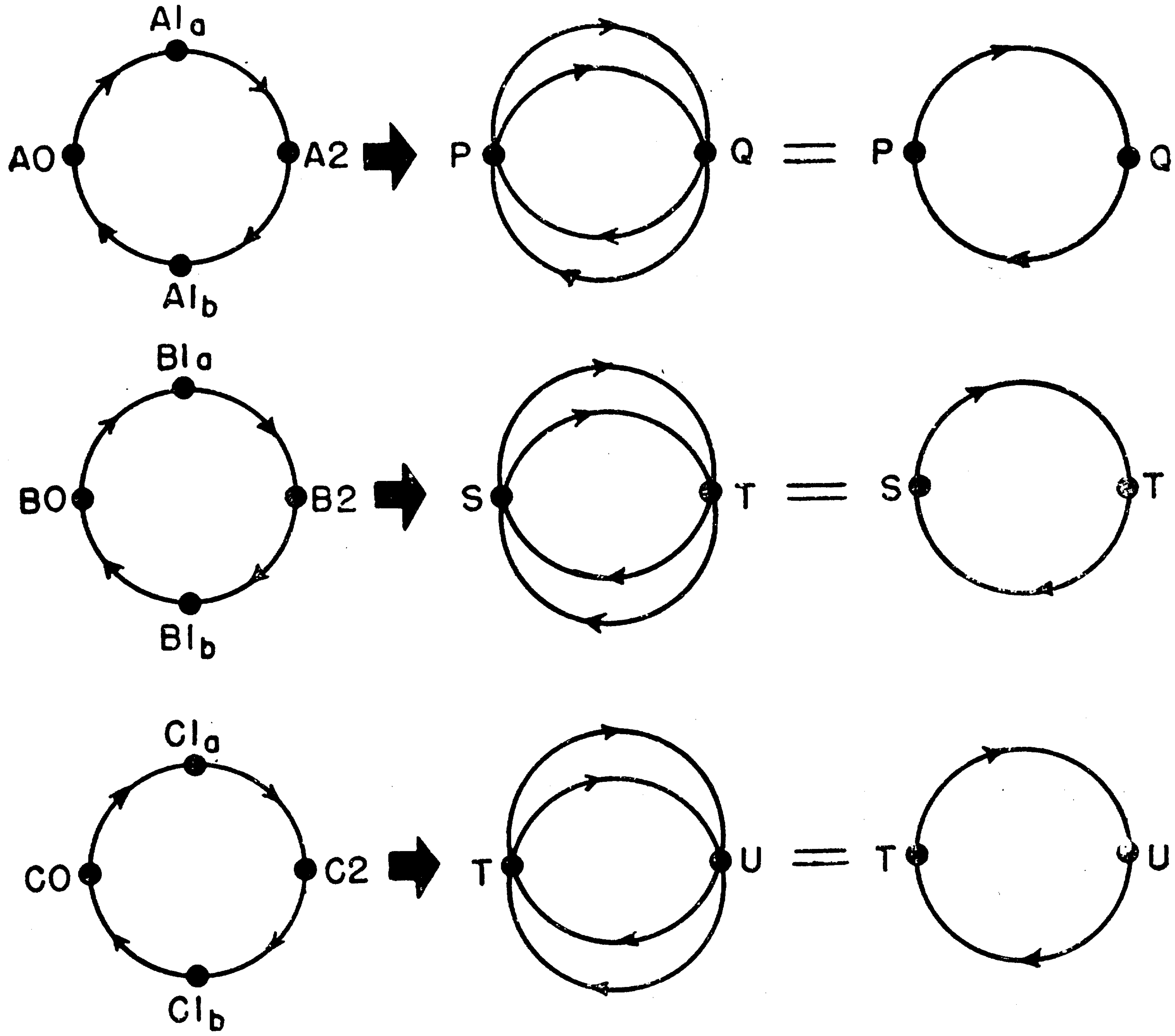
後者的每一元均由前者的兩個元所構成，這使父系線及母系線的世代循環完全改觀。

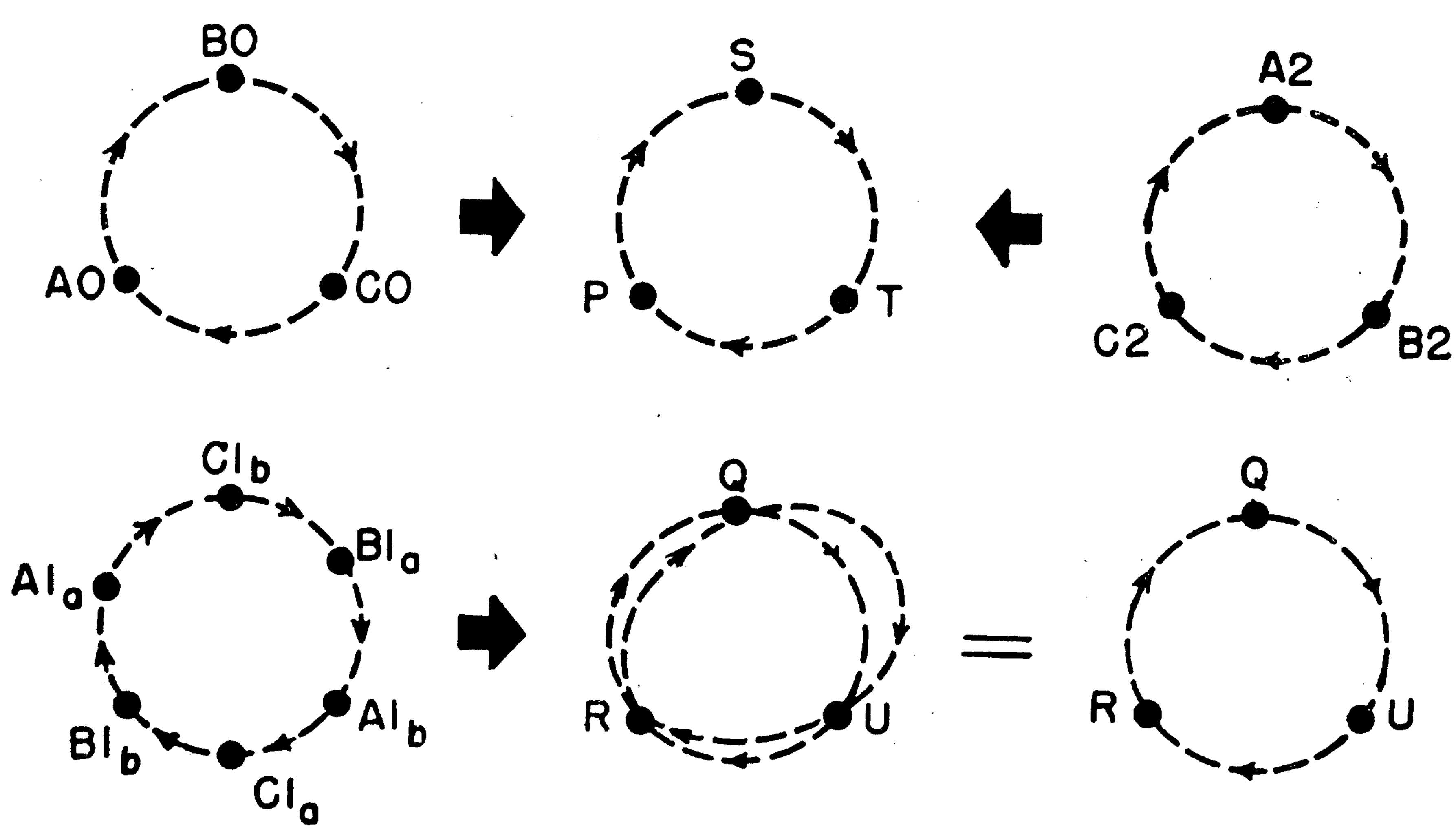
在父系線，原有的三條四世代循環轉變爲二世代循環。即

$$A0 \rightarrow A1a \rightarrow A2 \rightarrow A1b \rightarrow A0 \Rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow P$$

$$B0 \rightarrow B1a \rightarrow B2 \rightarrow B1b \rightarrow B0 \Rightarrow S \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow S$$

$$C0 \rightarrow C1a \rightarrow C2 \rightarrow C1b \rightarrow C0 \Rightarrow T \rightarrow U \rightarrow T \rightarrow U \rightarrow T$$


Al a
AO
A2
Al b
P
Q
=
P
Q
Bl a
BO
B2
Bl b
S
T
=
S
T
Cl a
CO
C2
Cl b
T
U
=
T
U


BO
AO
CO
S
P
T
A2
C2
B2
Cl b
Al a
Bl a
Bl b
Al b
Cl a
Q
R
U
=
Q
R
U

在母系線，其符號轉換如下：

$$
\begin{array}{lcl}
A0 \cdots\to B0 \cdots\to C0 \cdots\to A0 & \longrightarrow & P \cdots\to S \cdots\to T \cdots\to P \\
\left.\begin{array}{l} B1b \cdots\to A1a \cdots\to C1b \cdots\to B1a \\ \quad \cdots\to A1b \cdots\to C1a \cdots\to B1b \end{array}\right\} & \to & \left\{\begin{array}{l} R \cdots\to Q \cdots\to U \cdots\to R \\ \quad \cdots\to Q \cdots\to U \cdots\to R \end{array}\right. \\
C2 \cdots\to A2 \cdots\to B2 \cdots\to C2 & \nearrow &
\end{array}
$$

兩條右旋廻母系線 (0,2) 轉變成爲同一條母系線，仍維持三世代循環，左旋廻的母系線 (1) 轉變後也自六世代循環改爲三世代循環。父系線與母系線的世代循環，可用下面的關係式表示：

(1)　$m^2=I$　　(patri-cycle)

(2)　$f^3=I$　　(matri-cycle)

婚姻的方式沒有改變。故，其關係式 $m^3=fmf$ 代入第一項時，可得

(3)　$(fm)^2=(mf)^2=I$

根據這些關係式，我們可以衍出下面的幾個關係式：

(1′)　$m=m^{-1}$

(2′)　$f^2=f^{-1}$

(2″)　$f=f^{-2}$

(3′)　$(f^2m)^2=(mf^2)^2=I$

$$
\begin{aligned}
\because\ (f^2m)^2 &= ffmffm \quad \text{代入 (3) } m=fmf \\
&= fmfm \\
&= mm \\
&= I
\end{aligned}
$$

六個分節或分組的焦點及其數字符號，錄於下面：

S00 (I)　　S10 (f)　　S20 (f^2)

S01 (m)　　S11 (fm)　　S21 (f^2m)

這些六個元的集合，其兩項運算可用下面的公式：

$$Sx_1y_1 \otimes Sx_1y_2 = S(x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

由此，我們可得一六元運算表如下：

⊗	S00	S01	S10	S11	S20	S21
S00	S00	S01	S10	S11	S20	S21
S01	S01	S00	S21	S20	S11	S10
S10	S10	S11	S20	S21	S00	S01
S11	S11	S10	S01	S00	S21	S20
S20	S20	S21	S00	S01	S10	S11
S21	S21	S20	S11	S10	S01	S00

這張運算表所透露的數理特徵如下:

(1) 這是一個六元的內運算。

(2) 有單位元 S00 的存在。

(3) 有反元的存在。

(4) 其運算滿足結合的準則。

但其運算不能滿足交換律,故我們可稱之爲“六元的不可交換羣”。

三、ARUNTA 型連婚圈結構

在雙方交表婚制裏,以四條父系線來建構連婚圈的例子,盛見於居住澳洲內陸砂漠周圍的 Arunta (Aranda) 族之間。下面,我們按照上例,分成理想形態及特殊形態兩段來討論。

我們命名四個遊羣爲 A、B、C、D 並用此來代表四條父系線。至於隱藏遊羣間的四條母系線,用 0 、1 、2 、3 來代表。各分節用父系及母系符號的組合來表示,並設各遊羣屬於第一世代的分節定名爲 A0、B1、C2、D3。其婚姻,規定在第一世代,遊羣A和 B 及 C 和 D 之間的直接姊妹交換婚,並禁止 A, B 和 C, D 之間的婚姻。在第二世代,上世代容許的婚姻被禁止,改爲 A 和 D 及 B 和 C 之間的姊妹交換婚。在第三世代,上世代的婚姻方式被禁止而回復上上世代的婚姻方式,即採用第一世代的婚姻方式。以下每世代反覆之,即每奇數世代採用第一世代婚姻方式而每偶數世代採用第二世代婚姻方式。這種制定婚,使嫁娶的對象限定於特殊的幾個親屬類型,即於 á+m+â+å−ă−m−à 之間。換句話說,婚姻舉行於第二交表 $_m$FFZSS 與 $_m$FMBSS 之間的姊妹交換婚。

下面，我們將採用單純化的系譜線來表示四遊羣間的雙方亦表婚連姻圈圖。（參照圖六）

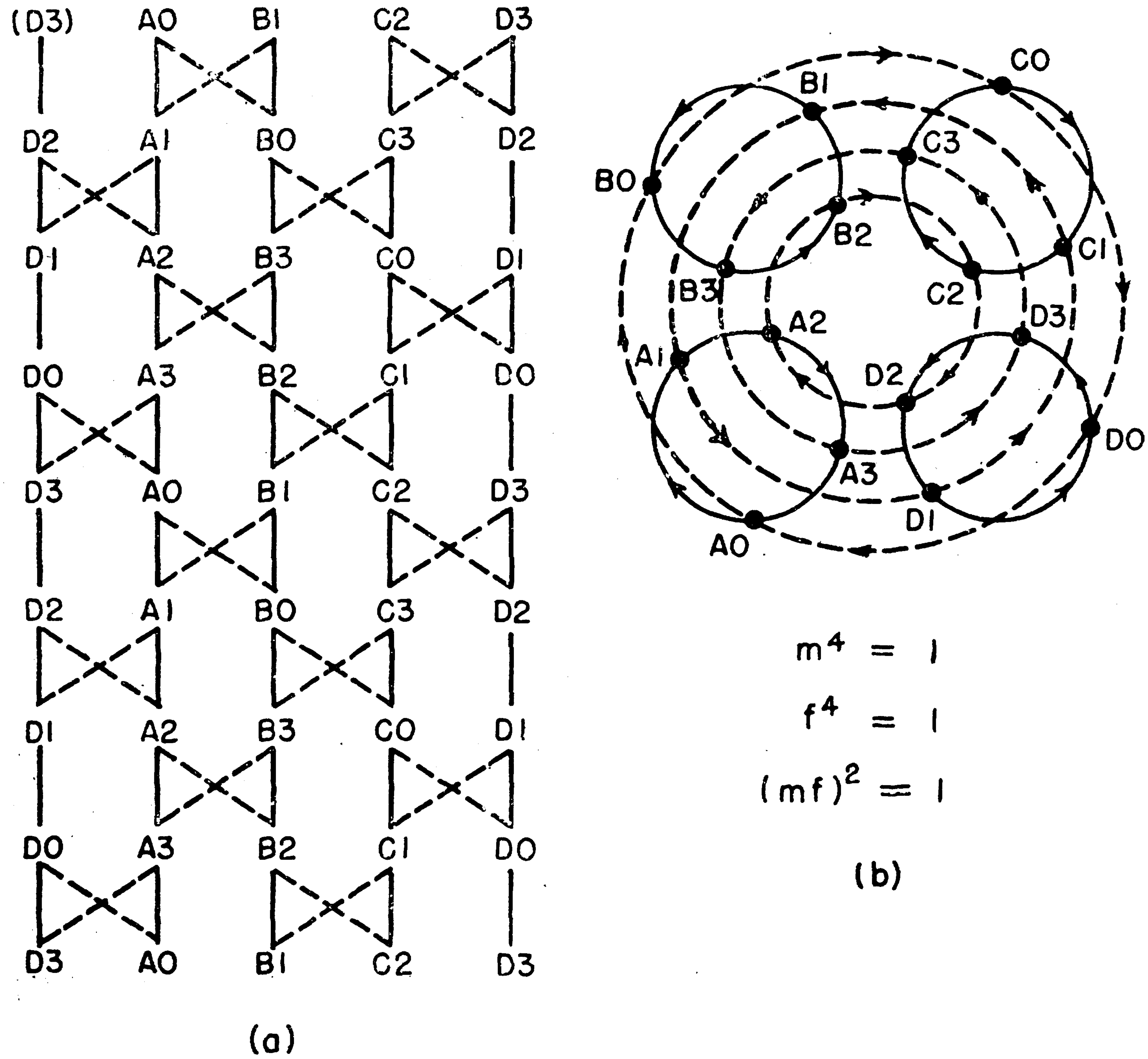
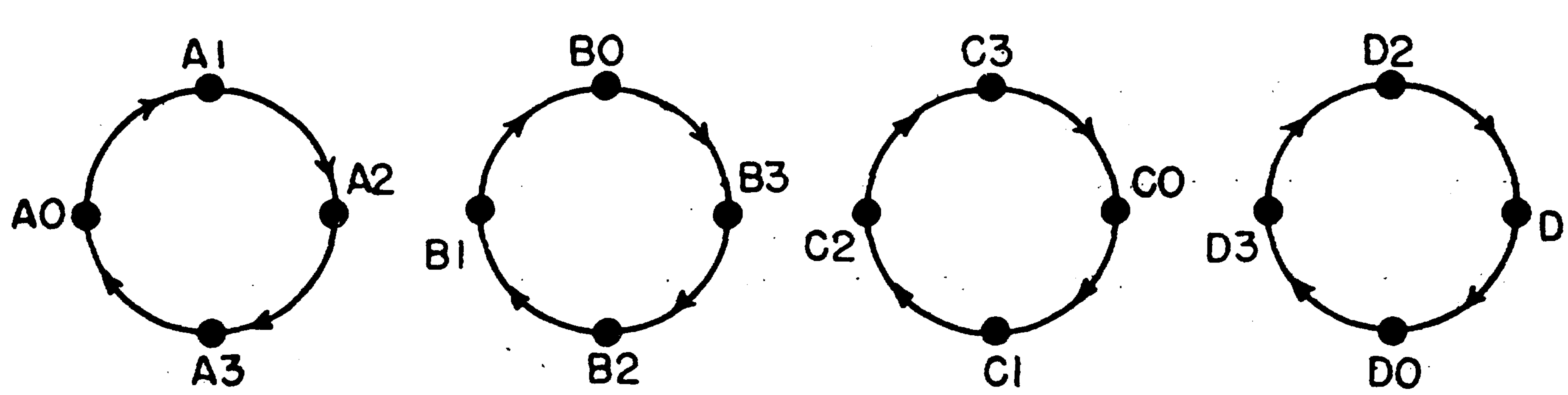


Figure 6. 4-horde Circulating Connubium (Ideal Type)
(a) Many-to-one Graph
(b) One-to-one Graph

首先，我們根據多對一圖示來探討各父系線的世代循環。

A0 ⟶ A1 ⟶ A2 ⟶ A3 ⟶ A0
B1 ⟶ B0 ⟶ B3 ⟶ B2 ⟶ B1
C2 ⟶ C3 ⟶ C0 ⟶ C1 ⟶ C2
D3 ⟶ D2 ⟶ D1 ⟶ D0 ⟶ D3



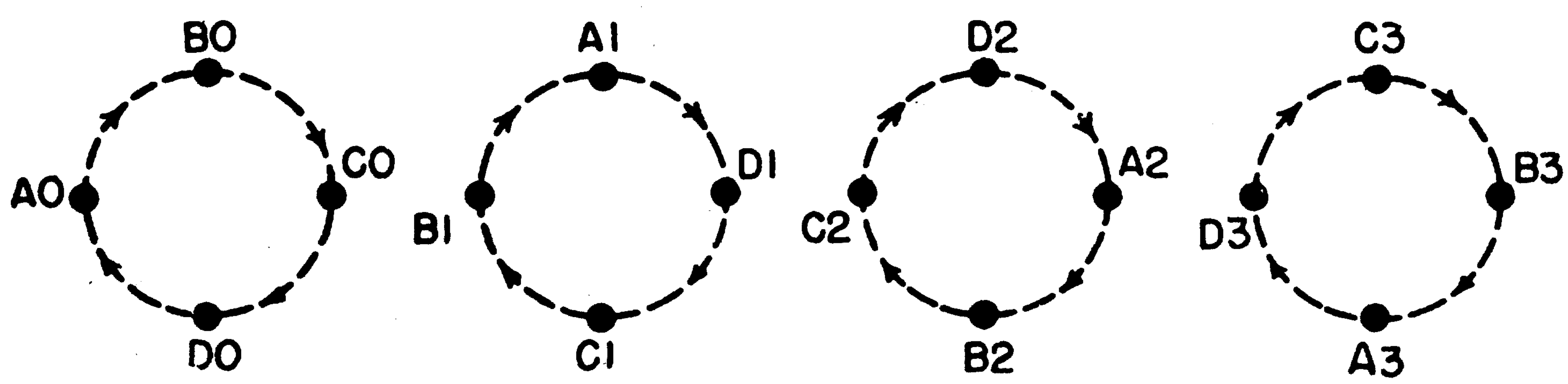
四條父系線均由四世代循環的規律所支配，惟其與母系線交切的順序有兩種，一爲順數序（A、C），一爲逆數序（B、D），我們稱順數序爲右旋廻父系線，逆數序者爲左旋廻父系線。在母系線，其世代循環的順序如下：

A0⋯→B0⋯→C0⋯→D0⋯→A0

B1⋯→A1⋯→D1⋯→C1⋯→B1

C2⋯→D2⋯→A2⋯→B2⋯→C2

D3⋯→C3⋯→B3⋯→A3⋯→D3



四條母系線與父系線相同，均由四世代循環的規律所支配。其中，按照英文字母的順序與父系線交切者（0、2）稱爲右旋廻母系線，逆英文字母的順序者稱爲左旋廻的母系線（1、3）者，在前章已有所提。

綜之，四遊羣舉行第二交表婚而構成的連婚圈產生十六個分節，四條父系線及四條母系線均遵守四世代循環的規律；其排列即由右旋廻與左旋廻者，相互交錯爲特點。

茲取十六個分節中任意之一爲原點（I）時，其集合可用數字符號及焦點表示如下：

S00 (I)	S01 (m)	S02 (m^2)	S03 (m^3)
S10 (f)	S11 (fm)	S12 (fm^2)	S13 (fm^3)
S20 (f^2)	S21 (f^2m)	S22 (f^2m^2)	S23 (f^2m^3)
S30 (f^3)	S31 (f^3m)	S32 (f^3m^2)	S33 (f^3m^3)

本集合，可依下列公式做"二元運算"。

(i)　$Sx_1\overset{\blacktriangle}{y_1} \otimes Sx_2y_2 = S(x_1+x_2)(y_1+y_2)$

(ii)　$Sx_1\overset{\blacktriangledown}{y_1} \otimes S\overset{\blacktriangle}{x_2}y_2 = S(x_1+x_2)(y_1+y_2)$

(iii)　$Sx_1\overset{\blacktriangledown}{y_1} \otimes S\overset{\blacktriangledown}{x_2}y_2 = S(x_1-x_2)(y_2-y_1)$

依據這些公式，可得十六元運算表（見下頁）。

⊗	S00	S01	S02	S03	S10	S11	S12	S13	S20	S21	S22	S23	S30	S31	S32	S33
S00	S00	S01	S02	S03	S10	S11	S12	S13	S20	S21	S22	S23	S30	S31	S32	S33
S01	S01	S02	S03	S00	S33	S30	S31	S32	S21	S22	S23	S20	S13	S10	S11	S12
S02	S02	S03	S00	S01	S12	S13	S10	S11	S22	S23	S20	S21	S32	S33	S30	S31
S03	S03	S00	S01	S02	S31	S32	S33	S30	S23	S20	S21	S22	S11	S12	S13	S10
S10	S10	S11	S12	S13	S20	S21	S22	S23	S30	S31	S32	S33	S00	S01	S02	S03
S11	S11	S12	S13	S10	S03	S00	S01	S02	S31	S32	S33	S30	S23	S20	S21	S22
S12	S12	S13	S10	S11	S22	S23	S20	S21	S32	S33	S30	S31	S02	S03	S00	S01
S13	S13	S10	S11	S12	S01	S02	S03	S00	S33	S30	S31	S32	S21	S22	S23	S20
S20	S20	S21	S22	S23	S30	S31	S32	S33	S00	S01	S02	S03	S10	S11	S12	S13
S21	S21	S22	S23	S20	S13	S10	S11	S12	S01	S02	S03	S00	S33	S30	S31	S32
S22	S22	S23	S20	S21	S32	S33	S30	S31	S02	S03	S00	S01	S12	S13	S10	S11
S23	S23	S20	S21	S22	S11	S12	S13	S10	S03	S00	S01	S02	S13	S10	S11	S12
S30	S30	S31	S32	S33	S00	S01	S02	S03	S10	S11	S12	S13	S20	S21	S22	S23
S31	S31	S32	S33	S30	S23	S20	S21	S22	S11	S12	S13	S10	S03	S00	S01	S02
S32	S32	S33	S30	S31	S02	S03	S00	S01	S12	S13	S10	S11	S22	S23	S20	S21
S33	S33	S30	S31	S32	S21	S22	S23	S20	S13	S10	S11	S12	S01	S02	S03	S00

該集合由十六個元所構成，滿足 (1)內運算 (2)結合律 (3) 有單位元 (4) 有反元等性質，但不一定滿足交換律。故可稱為"不可交換的十六元羣"。構成本羣的基本關係式 (group-theoretic relation) 為

$$m^4 = f^4 = (mf)^2 = I$$

以上的探討是分析四個遊羣嚴格的舉行雙方交表婚時自然產生的理想形態。在現存的民族誌資料裏，以澳洲的 Arunta 族的八分組制而聞名。Arunta 制與上述理想形態之不同處，在於父系線的世代循環不同。理想形態由四世代循環的規律所支配，但 Arunta 制只由二世代循環之規律所支配者，與 Ambrym 制相同。

今設四個遊羣為A、B、C、D，八個分節或分組為 P·Q、R、S、T、U、V、W，各遊羣的分節分配及分節間的婚姻組配合，一如圖七所示。

這是八個分節組成的集合，由四條父系線及二條母系線所構成。父系線由二世代循環，母系線由四世代循環的規律所支配。八個元的數字符號及其焦點如下：

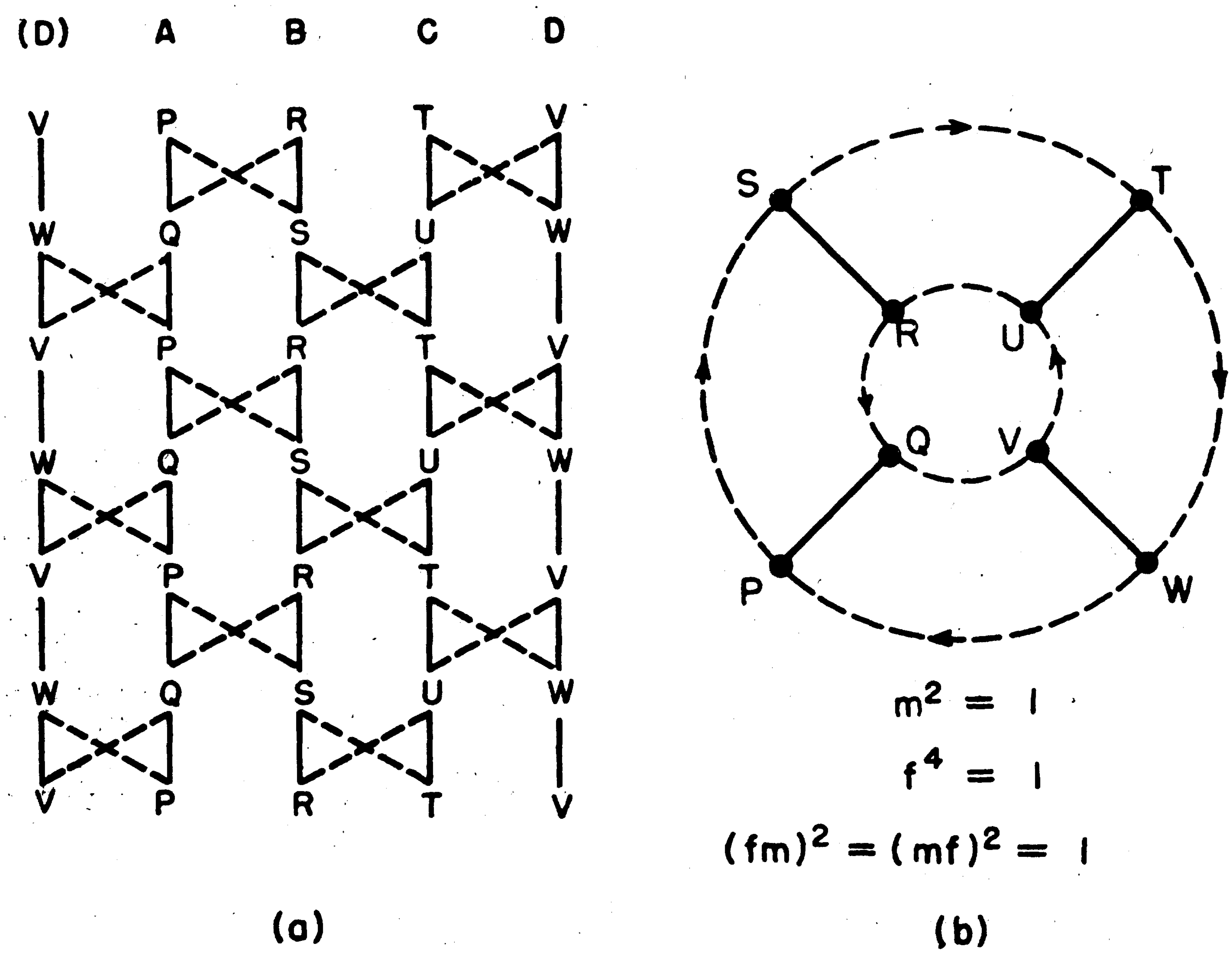


Figure 7. Arunta Type Circulating Connubium
(a) Many-to-one Graph
(b) One-to-one Graph

S00(I)	S10(f)	S20(f^2)	S30(f^3)
S01(m)	S11(fm)	S21(f^2m)	S31(f^3m)

這些八個元的集合，其二元運算可用下面的公式行之。

$$Sy_1x_1 \otimes Sy_2x_2 = S(x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

據此，我們可得八元的運算表如下：

$\otimes$	S00	S01	S10	S11	S20	S21	S30	S31
S00	S00	S01	S10	S11	S20	S21	S30	S31
S01	S01	S00	S11	S10	S21	S20	S31	S30
S10	S10	S11	S20	S21	S30	S31	S00	S01
S11	S11	S10	S21	S20	S31	S30	S01	S00
S20	S20	S21	S30	S31	S00	S01	S10	S11
S21	S21	S20	S31	S30	S01	S00	S11	S10
S30	S30	S31	S00	S01	S10	S11	S20	S21
S31	S31	S30	S01	S00	S11	S10	S21	S20

本集合滿足（1）內運算（2）結合律（3）有單位元（4）有反元及(5)交換等準則，故我們可稱之為"八元的阿伯羣"。構成本羣的基本關係式為：

$$m^2=f^4=(mf)^2=(fm)^2=I$$

四、雙方交表婚連婚圈的一般結構模式

在前面諸節，我們個別的探討幾個雙方交表婚制的結構模式。我們若以Π來表示由雙方交表婚所產生的分節的集合，並用Π的右下足標表示遊羣或父系線的數目，右上角標表示父系線的世代循環數時，Π_2^2即表示由二個遊羣組合的連婚圈（右下足標），每遊羣的父系世代循環為 2（右上角標），分節的數目等於父系世代數與遊羣數目之積，$2\times2=4$，即為四，母系世代循環數為遊羣數目與父系世代循環數的最小公倍數。配偶關係為第一交表婚，可用 $mf=fm$ 或 $(mf)^2=I$ 的關係式來表示。我們採用下面的關係式來表示集合 Π_2^2 的數理特徵：

$$\Pi_2^2:\ m^2=f^2=(mf)^2=I$$

同理，前面探討過的由三遊羣連婚圈產生的理想形態（Π_3^4），特殊形態（Π_3^2），由四個遊羣連婚圈產生的理想形態（Π_4^4），及特殊形態（Π_4^2），可採用下面的關係式來表示：

Π_3^4: $m^4=I$, $f^3=I$（右旋廻）

$f^6=I$（左旋廻）

$m^3=fmf$, $m^2f=fm^2$

Π_3^2: $m^2=f^3=(mf)^2=I$

Π_4^4: $m^4=f^4=(mf)^2=m^{-2}f^{-1}m^2f=I$

Π_4^2: $m^2=f^4=(mf)^2=I$

若我們增加構成連婚圈之遊羣的數目時，所得的理想形態，可用如下的關係式來表示：

Π_5^{12}: $m^{12}=(mf)^2m^{-2}=f^{-1}m^2f=I$

$f^{10}=I$（右旋廻）

$f^{16}=I$（左旋廻）

Π_6^6: $m^6=f^6(mf)^2=m^{-2}f^{-1}m^2f=I$

Π_7^{24}: $m^{24}=(mf)^2=m^{-2}f^{-1}m^2f=I$

$f^{21}=I$ (右旋廻)

$f^{28}=I$ (左旋廻)

Π_8^8: $m^8=f^8=(mf)^2=m^{-2}=f^{-1}m^2f=I$

Π_9^{40}: $m^{40}=(mf)^2=m^{-2}f^{-1}m^2f=I$

Π_{10}^{10}: $m^{10}=f^{10}=(mf)^2=m^{-2}f^{-1}m^2f=I$

Π_{11}^{60}: $m^{60}=(mf)^2=m^{-2}f^{-1}m^2f=I$

$f^{55}=I$ (右旋廻)

$f^{66}=I$ (左旋廻)

....

Π的理想形態有二型，一型是遊羣的數目爲偶數 (2n) 者，另一型爲奇數 (2n+1) 者，分述如下：

(A) 遊羣的數目爲偶數(2n) 時　父系線，母系線的數目及其世代循環數與遊羣的數目相等。配偶的法定距離爲 $33_{27}/33_{72}$ (FMBSS/FFZSD) 婚，或$33_{33}/33_{66}$(FFZSS/FMBSD) 婚。這些可用下面的關係式來表示：

Π_{2n}^{2n}: $m^{2n}=f^{2n}=(mf)^2=m^{-2}f^{-1}m^2f=I$

(B) 遊羣的數目爲奇數 (2n+1) 時　所構成的連婚圈以斜婚爲其特徵，這使右旋廻的母系線 (n+1) 及左旋廻的母系線 (n) 的世代循環長短不等。又，父系線受右旋廻的及左旋廻的母系線相互交切，因而產生頗長的世代循環。這些可用下面的關係式求之。

$\Pi_{2n+1}^{2n(n+1)}$: $m^{2n(n+1)}=(mf)^2=m^{-2}f^{-1}m^2f=I$

$f^{(2n+1)n}=I$ (右旋廻)

$f^{(2n+1)(n+1)}=I$ (左旋廻)

以上是Π的理想形態，至於其特殊形態，把父系(或母系)世代循環做任意的改變而產生。最常見的是父系線採用二世代循環者。不同的連婚圈採用二世代循環時，可用下面的關係式表示之。

Π_2^2: $m^2=f^2=(mf)^2=I$

Π_3^2: $m^2=f^3=(mf)^2=I$

Π_4^2: $m^2=f^4=(mf)^2=I$

Π_5^2: $m^2=f^5=(mf)^2=I$

Π_6^2: $m^2=f^6=(mf)^2=I$

Π_7^2: $m^2=f^7=(mf)^2=I$

Π_8^2: $m^2=f^8=(mf)^2=I$

………………

以此類推，我們可得其一般式爲：

Π_n^2: $m^2=f^n=(mf)^2=I$

至於各連婚圈配偶的親屬距離，可從公式 $(mf)^2=I$ 導出。

所以公式爲 $mfmf=I$ (1)

兩邊⊗ m^{-1} $fmf=m^{-1}$ (2)

把(2)代入(1) $mf(fmf)f=I$ (3)

把(2)代入(3) $mff(fmf)ff=I$ (4)

如此反覆代入，我們可得

$$(mf)^2=(mf^2)^2=(mf^3)^2=(mf^4)^2=\cdots\cdots(mf^{n-1})^2=I \quad (5)$$

至於各項關係式所代表的配偶間的親屬距離，可用下面的公式求之。

$$(mf^{n-x})^2=m^{-1}f^{-x}mf^{n-x} \quad (6)$$

參 考 書 目

劉斌雄

1969 Murngin 親屬結構的數學研究，中央研究院民族學研究所集刊，27:25-104。

RADCLIFFE-BROWN, A. R.

1913 Three Tribes of Western Australia. *Journal of the Royal Anthropological Institute*. 43: 143-194.

DEACON, A. B.

1927 The Regulation of Marriage in Ambrym. *Journal of the Royal Anthropological Institute*. **57**: 325-242.

SPENCER, B. and F. J. GILLEN

1927 *The Arunta*. England: Macmillan.

BULLETIN OF THE
INSTITUTE OF ETHNOLOGY
ACADEMIA SINICA ,
Number 41 pp. 1-23 1976 (Spring)

BILATERAL CROSS-COUSIN MARRIAGE SYSTEM
A MATHEMATICAL ANALYSIS

(ABSTRACT)

PIN-HSIUNG LIU

Let a connubium with bilateral cross-cousin marriage consist of p unilineal descent groups or hordes. In the most natural type of such a connubium, the successive generations in each patriline, and also in each matriline, form a p-generation cycle, if p is even, and the total number of segments in the connubium is p^2. If the descent group is patrilineal, with a q-generation cycle, with $q \neq p$, the total number of segments is pq, and the successive matri-generations form an r-cycle, where r is the l.c.m. of p and q; and analogously for matrilineal descent groups. Here the group-theoretic relations are:

1. $p=2n$: $m^p=f^p=(mf)^2=\mathrm{I}$
2. $p=2n$: $m^q=f^r=(mf)^2=\mathrm{I}$

But if p is odd, with $p=2n+1$, the patrigenerations form a cycle of length $2n(n+1)$; and the matrigenerations form a cycle of length $n(2n+1)$ for right-circulation (f_1) and a cycle of length $(n+1)$ $(2n+1)$ for left-circulation (f_2). Here the group-theoretic relations are

3. $p=2n+1$: $m^{2n(n+1)}=f_1{}^{n(2n+1)}=f_2{}^{(n+1)(2n+1)}=(mf)^2=\mathrm{I}$

In particular, for the Kariera, Ambrym and Arunta systems, we have $q=2$ (alternating-generations principle) with $p=2$, 3, 4 respectively, so that the group-theoretic relations are

4. $q=2$: $m^2=f^p=(mf)^2=\mathrm{I}$