中央研究院民族學研究所集刊
第43期 頁 1-21 民國66年春季

KOKATA 親屬結構的數理研究

劉　斌　雄

Kokata 親屬制的連婚圈由四條父系線或母系線所構成。各線間舉行隔二世代的雙方交表婚，因而產生 I, f^2m, fm^2, fmf, m, m^2, f, f^2, fm, fmfm, mf, f^2m^2 等分節。以分節爲元的集合具有 $m^3=f^3=(fm^2)^2=I$ 的羣論關係。十二個分節中有四個自反元 I, f^2m, fm^2, fmf 及四組正反對(f, f^2), (m, m^2), (fm, fmfm), (mf, f^2m^2). f- 循環子羣（I, f, f^2）的右分解得代表四條母系線的陪集，m- 循環子羣（I, m, m^2）的左分解得代表四條父系線的陪集。單位元以外的三個共軛類代表三個不同的世代。正規子羣由屬於自我世代的四個自反元所構成與 Klein 的四元羣同構。交換子羣、共軛子羣均與正規子羣相等。因子羣由以正規子羣爲模數而得的三個陪集爲元，各陪集由不同世代分節的集合而成。

在制定婚制（prescriptive marriage system）中，已知雙方交表婚（bilateral cross-cousin marriage）的連婚方式有三種，各以 Kariera, Ambrym 及 Arunta 三個社會的親屬制度爲其代表。作者在“雙方交表婚制的數理結構”(1976)一文裏，曾以這三種婚姻方式爲基礎，分析其結構，進而建立其一般性的數理模式如下：

組構雙方交表婚連婚圈的繼嗣羣體數 p 爲偶數 2n 且 $n\geq1$ 時，其父系 (m) 及母系 (f)的世代循環原則上均由 p 世代循環所支配，分節數爲 p^2。若繼嗣羣爲父系而其世代循環數定爲 q 而 $q\neq p$ 時，分節數爲 pq，母系世代循環數爲 p 與 q 的最小公倍數 r，或者兩者相反。其關係式爲

1　$p=2n:\ m^p=f^p=(mf)^2=I$

2　$p=2n:\ m^q=f^r=(mf)^2=I$

若 p 爲奇數 2n+1 時，父系世代循環數爲 2n(n+1)，母系世代循環右旋廻者 (f_1) 爲 n(n+1)，左旋廻者 (f_2) 爲 (n+1)(2n+1)。其關係式爲

3　$p=2n+1:\ m^{2n(n+1)}=f^{n(2n+1)}=f^{(n+1)(2n+1)}=(mf)^2=I$

Kariera, Ambrym 及 Arunta 等常見的雙方交表婚制均採用互隔世代的原則，故其一般關係式爲

4　$p=2:\ m^2=f^p=(mf)^2=I$

新近，作者涉獵有關澳洲土著親屬制度的文獻時，發現 A. P. Elkin (1939:226-

234)報導的 Kokata (Kukata 或 Madutara)親屬制度雖採用雙方交表婚，但其方式又不屬於已知的任何一種。過去 Kokata 親屬制度的被忽略，也許學人誤認其爲 Arunta 型的亞型或變型所致。從數學的觀點來看，其羣論關係式 (group-theoretic relation) 不能從上述的公式演繹，這顯示着其屬於新的類型，新的層面，雙方交表婚制的組構方式，比我們所了解者更廣汎而複雜。

Kokata 親屬制不但提供雙方交表婚的新方式，其結構也極待剖明。本文，作者擬用子羣、陪集、共軛類、正規子羣、循環羣、因子羣、交換子羣等羣論概念來剖析其結構，企圖對親屬結構的數理模式有深一層的認識及了解。

一 KOKATA 型連婚結構

Kokata 是居住於南澳洲 (South Australia) Stuart Range 西南方地區的土著，爲南 Aluridja 的一支，族名爲 Madutara，平常以其渾名 Kokata 或 Kukata 而

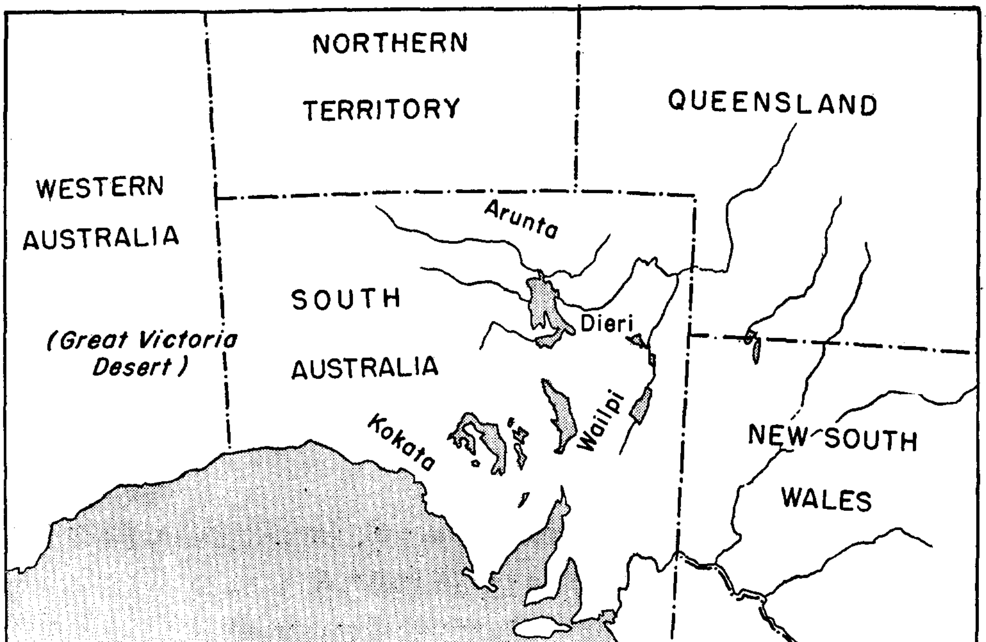


Figure 1.

知名，為 '肉食者' (meat-eaters) 之意。根據 Elkin 的報導，該族無偶族 (moieties) 的組織，也缺分組 (section or subsection) 名，與北部的 Arunta 或東北部的 Dieri, Wailpi 等大不相同。

Elkin 調查時，其成人人口只剩下四十餘名。不過其文化特質和佔南澳洲西半部的 Aluridja 無甚差異，如缺少偶族組織，類似的親屬結構、起源於 '夢時' (dream time) 神話的圖騰制度，由精靈得嬰兒的信仰 (spirit children beliefs)、以瘢痕的形成為成年禮完成的象徵、物質文化的極端缺乏、屬於同一語羣等等。

KOKATA KINSHIP

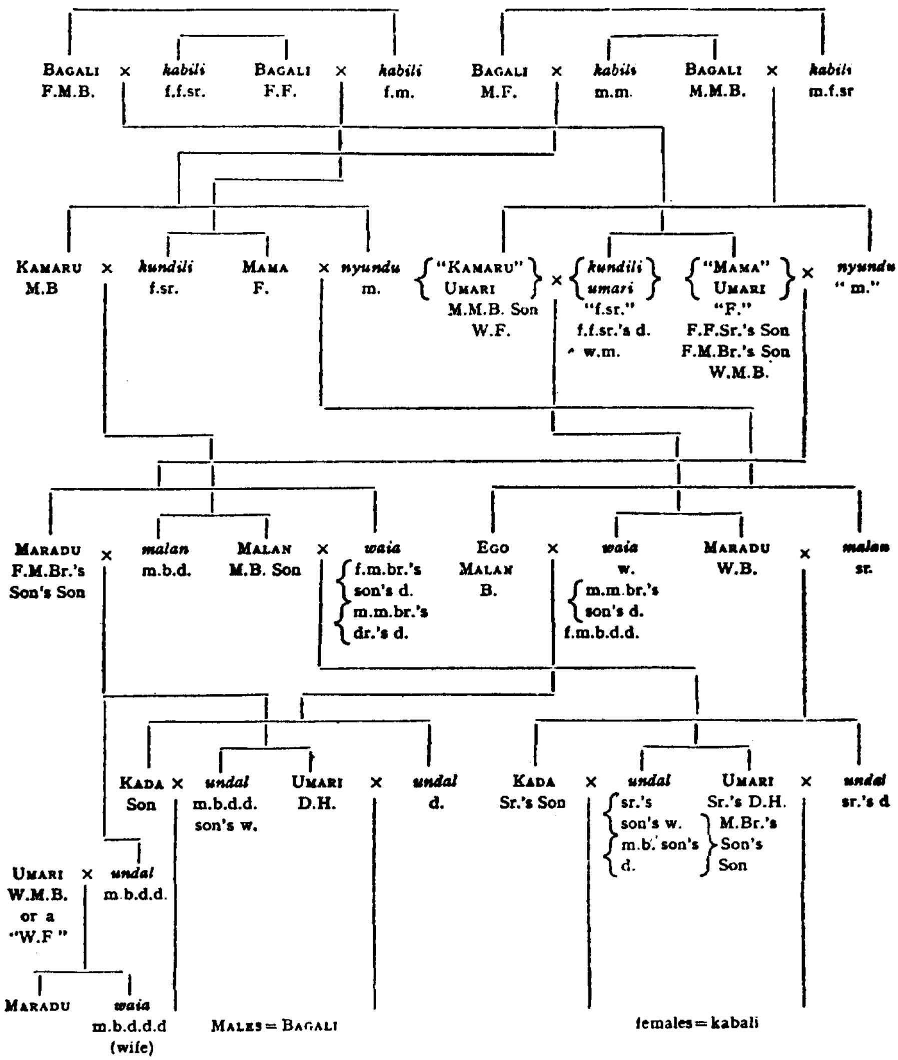


Figure 2.

根據 Elkin 的提示 (Figure 2)，Kokata 的連婚圈 (circulating connubium) 是由四條父系線 (patri-line) 或母系線 (matri-line) 所構成。我們採用不分性別的系譜線 (sex-ignored genealogical line) 來重構 Kokata 連婚圈 (Figure 3)；圖中

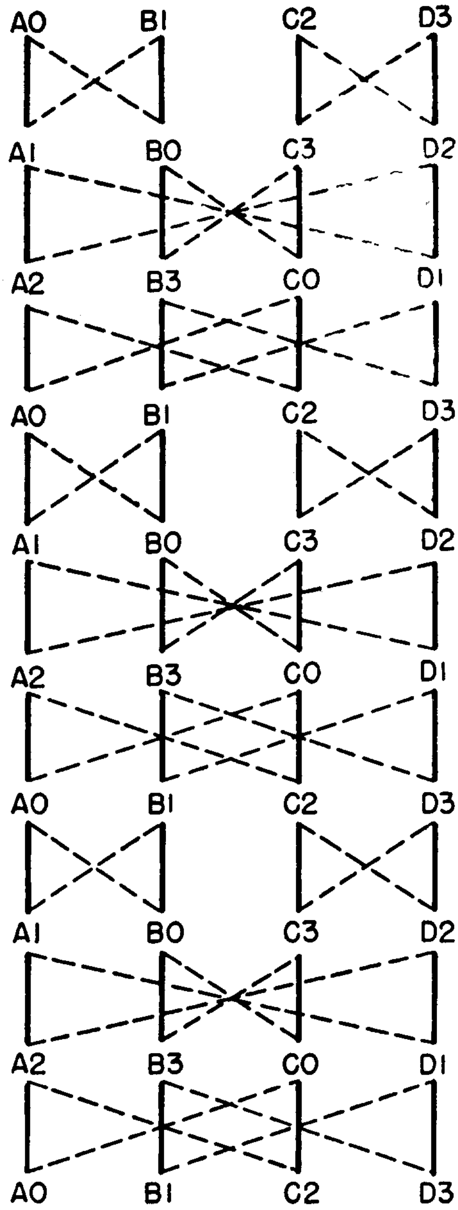


Figure 3.　Kokata Connubium
(Many-to-one graph)

用實線表示父子連繫 (father-child link),虛線表示母子連繫 (mother-child link); 四條父系線用 A, B, C, D, 四條母系線用 0, 1, 2, 3 的符號來表示;各分節 (segment) 卽用以父系及母系符號的組合來表示。

Kokata 的婚姻採用直接交換婚 (direct exchange marriage)。若外婚單位 X, Y 之間擧行交換婚時,該婚姻組我們用 (X, Y) 來表示之。每一世代產生的婚姻組合,其可能的配合是:

α: (A, B) (C, D)

β: (A, D) (B, C)

γ: (A, C) (B, D)

Kokata 連婚圈的婚姻組合,如第三圖所示,採用 α, β, γ 三種配合的輪流或者循環使用。比鄰的 Arunta 族,其連婚圈同樣的由四條父系線所構成,擧行同樣的直接交換婚,但其婚姻組合只採用 α, β 兩種輪流使用,沒有 γ 型婚姻組合爲其特徵。由於 A, C 和 B, D 之間沒有婚姻組合,因而可以聯合成爲偶族。Kokata 則各父系線間都有婚姻聯繫,使偶族關係無從產生。在 Kokata 型的制定婚制裏,嫁娶的對象自然的固定於特殊的親屬類型,卽於 a+f+à+â−á−m−a 之間。換句話說,婚姻介於第二交表 MFZSS–FMBDS 或 MMBSS–FFZDS 之間的姐妹交換婚,或者 mMFZSD–fFMBDS, mFMBDD–fMFZSS, mMMBSD–fFFZDS, mFFZDD–fMMBSS 婚。

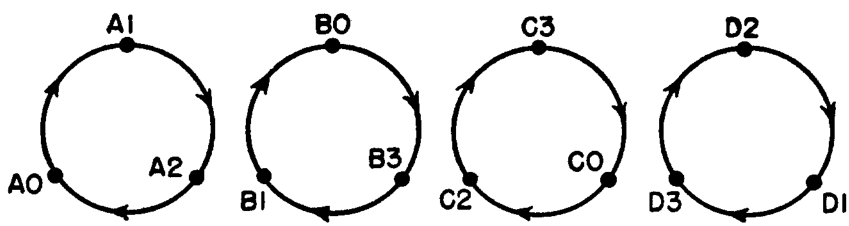
圖三表示 Kokata 連婚圈的多對一圖示 (many-to-one graph):圖中,四條父系線和四條母系線的相互交切產生 A0, A1, A2, B1, B0, B3, C2, C3, C0, D3, D2, D1 等十二個分節,並作有規律的循環。四組父系循環 (patri-cycle):

$A0 \longrightarrow A1 \longrightarrow A2 \longrightarrow A0$

$B1 \longrightarrow B0 \longrightarrow B3 \longrightarrow B1$

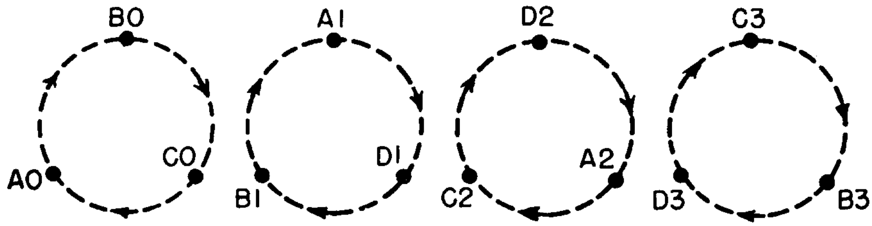
$C2 \longrightarrow C3 \longrightarrow C0 \longrightarrow C2$

$D3 \longrightarrow D2 \longrightarrow D1 \longrightarrow D3$



四條母系循環（matri-cycle）爲：

$$A0 \longrightarrow B0 \longrightarrow C0 \longrightarrow A0$$
$$B1 \longrightarrow A1 \longrightarrow D1 \longrightarrow B1$$
$$C2 \longrightarrow D2 \longrightarrow A2 \longrightarrow C2$$
$$D3 \longrightarrow C3 \longrightarrow B3 \longrightarrow D3$$



每條系譜線，均以三世代循環（3-generation cycle）爲其特徵。

下面，我們採用二個母數（generator）m 和 f 來探討分節的結構。實線表示的父子連繫用 m，虛線表示的母子連繫用 f 來代替時，各分節可用 m，f 的連積（product）來表示。Ego（I）可以設於十二個分節中的任何一個，若設 Ego 於 A0，即 A0=I，然後以此分節爲起點而分向各分節出發，我們便可得下面的關係式：

$$A0 = I = m^3 = f^3 = m^6 = f^6 = m^9 = f^9 = m^{12} = \ {}^{12} = \cdots\cdots$$
$$= \bar{m}^3 = \bar{f}^3 = \bar{m}^6 = \bar{f}^6 = \cdots\cdots$$
$$A1 = m = m^4 = fm^2f = m^7 = \bar{m}^2 = \bar{m}^5 = \bar{m}^8 = f\bar{m}f = \cdots\cdots$$
$$A2 = m^2 = m^5 = m^8 = \bar{m} = \bar{m}^4 = \bar{m}^7 = fmfmf = fm^2fm = \cdots\cdots$$
$$B0 = f = f^4 = fm^3 = f^7 = f^3m^3f = fmfm^2fm = \bar{f}^2 = \bar{f}^5 \cdots\cdots$$
$$B3 = fm = fm^4 = f^4m = fmf^3 = m\bar{f}\bar{m} = m^2\bar{f}\bar{m} = \bar{f}\bar{m}\bar{f}^2 = \cdots\cdots$$
$$B1 = fm^2 = m\bar{f} = f^4m^2 = mf^2 = fm^5 = fmfm^2f = \bar{m}^2\bar{f} = \cdots\cdots$$
$$C0 = f^2 = f^2m^3 = m^3f^2 = fm^3f = f^5 = \bar{f} = \bar{f}^4 = \bar{m}^3\bar{f} = \cdots\cdots$$
$$C2 = m^2f = f^2m = m^5f = f^5m = m^2f^4 = f^2m^4 = fmfmf^2 = \cdots\cdots$$
$$= \bar{f}\bar{m}^2 = \bar{f}^4\bar{m}^2 = \bar{f}\bar{m}^5 = \bar{f}m = \bar{m}f = \cdots\cdots$$
$$C3 = f^2m^2 = fmf^2 = m^2fm = f^5m^2 = f^2m^5 = \bar{f}\bar{m} = \cdots\cdots$$
$$D3 = fmf = fmfm^3 = m^2f^2m^2 = f^2m^2f^2 = \bar{f}\bar{m}\bar{f} = \bar{m}\bar{f}\bar{m} = \cdots\cdots$$
$$D2 = m^2f^2 = fmfm = m^5f^2 = m^2f^5 = m^2f^2m^3 = \bar{m}\bar{f} = \cdots\cdots$$
$$D1 = mf = m^4f = mf^4 = fmfm^2 = fm^2f^2 = \bar{m}^2\bar{f}^2 = \cdots\cdots$$

其中，$\bar{m}$，$\bar{f}$ 爲 m，f 的反元素（inverse），$\bar{m}$ 表示子父連繫（child-father link），$\bar{f}$ 表示子母連繫（child-mother link）。

由上面的諸關係，我們可以歸納出下面的三個基本關係式(group-theoretic relation)：

(1)	$m^3=I$	(patri-cycle)
(2)	$f^3=I$	(matri-cycle)
(3)	$(fm^2)^2=(mf^2)^2=I$	(marriage relation)

及由此引出的幾個補助關係式：

(4)	$fm^2=mf^2$	(5)	$f^2m=m^2f$
(6)	$fmf=mfm$	(7)	$mf=fmfm^2$
(8)	$m^2f^2=fmfm$	(9)	$\bar{m}=m^2$
(10)	$\bar{m}^2=m$	(11)	$\bar{f}=f^2$
(12)	$\bar{f}^2=f$		

根據這些法則，由母數 $m\cdot f$ 及其反數 $\bar{m}\cdot\bar{f}$ 的任何連積所構成的長符號(long string)，均可簡化成列於各分節最前面的最短符號 (shortest string)，我們稱之爲各分節的焦點 (focus)。例如：

$fm\bar{m}\bar{f}mffm=fmmmffmffm$ (代入第九及第十一等式而得)

$=fffmffm$ (代入第一等式而得)

$=mffm$ (代入第二等式而得)

$=mmmf$ (代入第五等式而得)

$=f$ (代入第一等式而得)

$mm\bar{f}\bar{m}\bar{f}fm\bar{f}\bar{m}m=mmffmmfffmffmmm$ (代入第九及十一等式而得)

$=mmffmmmff$ (同上)

$=mmf$

$\bar{m}ffmmfmf=mmffmmfmf$ (代入第九等式而得)

$=mmffmmmfm$ (代入第六等式而得)

$=mmfffm$ (代入第一等式而得)

$=mmm$ (代入第二等式而得)

$=I$ (代入第一等式而得)

各分節與其焦點的對照如下：

A0 (I)	A1 (m)	A2 (m^2)	B0 (f)
B1 (fm^2)	B3 (fm)	C0 (f^2)	C2 (f^2m)
C3 (f^2m^2)	D1 (mf)	D2 $(fmfm)$	D3 (fmf)

圖四是十二個分節的一對一圖示 (one-to-one graph)，也可用準十四面體(semi-regular solid)，來表示之。該準十四面體（圖四B）由八個正三角形和六個正方形所

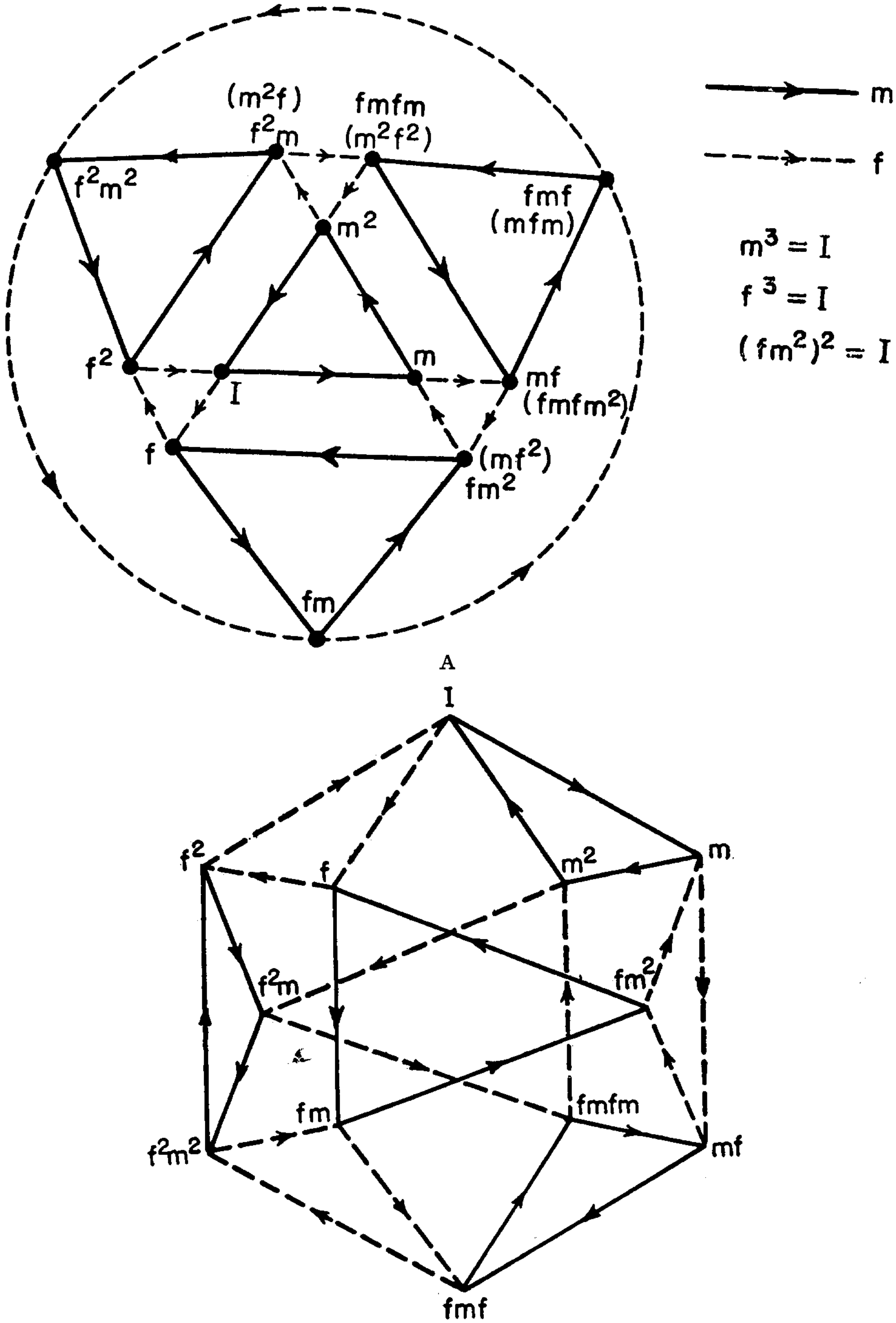


Figure 4. Kokata Connubium (one-to-one graph)

構成;三角形表示四個父系循環及四個母系循環,正方形表示六組婚姻配合。

十二個分節互相相積,可得如下的運算表:

Table 1. Segment Relations

I	m	m^2	f	f^2	fm	fm^2	f^2m	f^2m^2	fmf	fmfm	mf
m	m^2	I	mf	fm^2	fmf	fmfm	f	fm	f^2m^2	f^2	f^2m
m^2	I	m	f^2m	fmfm	f^2m^2	f^2	mf	fmf	fm	fm^2	f
f	fm	fm^2	f^2	I	f^2m	f^2m^2	m	m^2	fmfm	mf	fmf
f^2	f^2m	f^2m^2	I	f	m	m^2	fm	fm^2	mf	fmf	fmfm
fm	fm^2	f	fmf	f^2m^2	fmfm	mf	f^2	f^2m	m^2	I	m
fm^2	f	fm	m	mf	m^2	I	fmf	fmfm	f^2m	f^2m^2	f^2
f^2m	f^2m^2	f^2	fmfm	m^2	mf	fmf	I	m	fm^2	f	fm
f^2m^2	f^2	f^2m	fm	fmf	fm^2	f	fmfm	mf	m	m^2	I
fmf	fmfm	mf	f^2m^2	fm	f^2	f^2m	fm^2	f	I	m	m^2
fmfm	mf	fmf	m^2	f^2m	I	m	f^2m^2	f^2	f	fm	fm^2
mf	fmf	fmfm	fm^2	m	f	fm	m^2	I	f^2	f^2m	f^2m^2

根據上表,我們可以進一步的認識以下的事實:

(1) "世代遞傳" (generation tracing) 爲此集合的 "二元運算" (binary operation)。

(2) 因 I 在各行列中均出現一次,故各元對此運算而言,均有反元 (inverse) 的存在。

(3) 表中每一行及每一列都是最右行或最上列各元的重新排列。本集合的運算具封閉性。

(4) 十二個元中有一個元 I 的存在,與任何其他元做二元運算時,其值不變。卽有單位元 (unit element) 的存在。

(5) 任意三個元連續運算時,可滿足結合律 (associativity)。例如:

$$(fmf \otimes fm^2) \otimes mf = ffm \otimes mf = fm$$

$$fmf \otimes (fm^2 \otimes mf) = fmf \otimes ff = fm$$

總而言之,本集合由十二個元所構成,滿足(1)內運算(2)結合律(3)有單位元(4)有反元的存在等性質,但有 fm,mf 等元的存在表示不一定滿足交換律 (commutative),又其元數爲有限,若稱其元數爲此羣的秩 (order) 時,可稱此爲秩爲12的不可交換羣。

二　分節羣的內部結構

羣G的部分集合H，對G之運算而言，也成爲一羣時，稱H爲羣G之 '子羣' (subgroup)。子羣是羣中之羣之意，本節專論 Kokata 12 元羣之子羣，探討其分節內部結構的特殊性質。

Kokata 的親屬分節構成秩爲12的不可交換羣 (G_4^3)，

$$G_4^3=\{I, f, m, f^2, fm, mf, m^2, f^2m, fmf, fm^2, f^2m^2, fmfm\}$$

G的右下足標表示父系線的數目，右上者表示其世代循環數。

在羣裏每一個元有其反元。若元 a 的反元爲 b 時，我們稱 a, b 爲 '正反對' (inverse pair)，用 (a, b) 表示之；若元 c 的反元爲 c 本身時，我們稱之爲 '自反元' (self-inverse)，用(c)表示之。

羣 G_4^3 的十二個元由四個自反元 (I)、(f^2m)、(fmf)、(fm^2) 及四組正反對 (f, f^2)、(m, m^2)、(fm, fmfm)、(mf, f^2m^2) 所組成。子羣必有單位元的存在，故單位元 I 和其他任何一組自反元或正反對的集合，都可構成子羣。即

$$H_0=\{I\}$$
$$H_1=\{I,\ f^2m\}$$
$$H_2=\{I,\ fmf\}$$
$$H_3=\{I,\ fm^2\}$$
$$H_4=\{I,\ f,\ f^2\}$$
$$H_5=\{I,\ m,\ m^2\}$$
$$H_6=\{I,\ fm,\ fmfm\}$$
$$H_7=\{I,\ mf,\ f^2m^2\}$$

又，單位元以外的三個自反元，其任意二元的乘積 (product) 爲第三個元，即

$$fm^2\otimes f^2m=fmf \quad \text{or} \quad f^2m\otimes fm^2=fmf$$
$$fm^2\otimes fmf=f^2m \quad \text{or} \quad fmf\otimes fm^2=f^2m$$
$$fmf\otimes f^2m=fm^2 \quad \text{or} \quad f^2m\otimes fmf=fm^2$$

因此，四個自反元可構成另一子羣。

$$H_8=\{I,\ f^2m,\ fmf,\ fm^2\}$$

此外，任何二組正反對間的乘積都會產生自反元(參照表一)，故單位元和二組以上的正反對的集合，都不能構成子羣。羣 G_4^3 的另一子羣爲所有的自反元和正反對的集合，即

$$H_9=\{I, f, m, f^2, fm, mf, m^2, f^2m, fmf, fm^2, f^2m^2, fmfm\}$$

以上十個子羣中，H_9 和 G_4^3 相同，H_0 爲單位元單獨組成者，除此以外的八個子羣，稱爲羣 G_4^3 的眞子羣。

(一)陪集 (coset)

羣 G_4^3 的二元 a 和 b，其一 (a) 和另一的反元 ($\bar{b}$) 之連積 $a\bar{b}$ 屬於子羣 H_4 時，即

$$a \otimes \bar{b} \in H_4 = \{I, f, f^2\}$$

我們稱 a, b 爲以 H_4 爲模或模數 (modulus) 的左疊合 (congruence)，寫成

$$a \sim b \pmod{H_4}$$

和 a 同價的所有的元的集合 Ca，稱爲等勢集 (equivalent set)：$Ca = \{x / x \sim a\}$。

關於以 H_4 爲模的左疊合，以元 a 在內的等勢集爲

$$x \sim a \pmod{H_4} \Leftrightarrow x\bar{a} \in H_4 \Leftrightarrow x \in H_4 a$$

故與 $$H_{4a} = \{ha / h \in H_4\}$$

一致。我們稱之爲用 H_4 爲模而得的左陪集 (left coset)。又，有單位元在內的左陪集爲 H_4 本身。羣 G_4^3 可分解成幾個不同的左陪集的和，

$$G_4^3 = H_4 + H_{4m} + H_{4\bar{m}} + H_{4mf}$$

$$H_4 m = \{m, fm, f^2 m\}$$

$$H_4 \bar{m} = \{m^2, fm^2, f^2 m^2\}$$

$$H_4 mf = \{mf, fm, fmfm\}$$

我們稱之爲 G_4^3 以 H_4 爲模的左分解 (left split)。

Table 2. Coset Relations

$a\bar{b}$	e	f^2m	fmf	fm^2	f	f^2	m	m^2	fm	fmfm	mf	f^2m^2
e	e	f^2m	fmf	fm^2	f^2	f	m^2	m	fmfm	fm	$f^2 \cdot n^2$	mf
f^2m	f^2m	e	fm^2	fmf	m^2	fmfm	f^2	f^2m^2	f	mf	m	fm
fmf	fmf	fm^2	e	f^2m	fm	f^2m^2	mf	fmfm	m	f^2	f	m^2
fm^2	fm^2	fmf	f^2m	e	mf	m	fm	f	f^2m^2	m^2	fmfm	f^2
f	f	m	fmfm	f^2m^2	e	f^2	fm^2	fm	mf	f^2m	m^2	fmf
f^2	f^2	fm	mf	m^2	f	e	f^2m^2	f^2m	fmf	m	fm^2	fmfm
m	m	f	f^2m^2	fmfm	fm^2	mf	e	m^2	f^2	fmf	fm	f^2m
m^2	m^2	mf	fm	f^2	fmfm	f^2m	m	e	fm^2	f^2m^2	fmf	f
fm	fm	f^2	m^2	mf	f^2m^2	fmf	f	fm^2	e	fmfm	f^2m	m
fmfm	fmfm	f^2m^2	f	m	f^2m	m^2	fmf	mf	fm	e	f^2	fm^2
mf	mf	m^2	f^2	fm	m	fm^2	fmfm	fmf	f^2m	f	e	f^2m^2
f^2m^2	f^2m^2	fmfm	m	f	fmf	fm	f^2m	f^2	m^2	fm^2	fmfm	e

同樣的 $\bar{a}b \in H_4$ 時，我們稱 a 和 b 爲以 H_4 爲模的右疊合。有元 a 在內的等勢集成爲

$$aH_4 = \{ah/h \in H_4\}$$

我們稱之爲用 H_4 爲模而得的右陪集 (right coset)。

羣 G_4^3 用 H_4 爲模的右分解，可得四組陪集之和：

$$G_4^3 = H_4 + mH_4 + \bar{m}H_4 + fmH_4$$

$$mH_4 = \{m, mf, fm^2\}$$

$$\bar{m}H_4 = \{m^2, f^2m, fmfm\}$$

$$fmH_4 = \{fm, fmf, f^2m^2\}$$

這四組陪集恰好代表着四條母系線之元的集合。子羣 H_4 是有單位元 I，並由母數 f 產生的諸元 f 和 f^2 的集合，我們稱之爲秩 3 的循環羣 (cyclic group)。同理，$H_5 = \{I, m, m^2\}$ 也是秩 3 的循環羣，爲着區別，我們稱 H_4 爲 f- 循環羣，H_5 爲 m- 循環羣。

羣 G_4^3 用 f- 循環羣爲模的右分解，得代表四條母系線的陪集。

又，G_4^3 用 m- 循環羣爲模時，得下面的左分解：

$$G_4^3 = H_5 + H_5f + H_5f^2 + H_5fm$$

$$H_5f = \{f, mf, f^2m\}$$

$$H_5f^2 = \{f^2, fm^2, fmfm\}$$

$$H_5fm = \{fm, fmf, f^2m^2\}$$

及右分解：

$$G_4^3 = H_5 + fH_5 + f^2H_5 + mfH_5$$

$$fH_5 = \{f, fm, fm^2\}$$

$$f^2H_5 = \{f^2, f^2m, f^2m^2\}$$

$$mfH_3 = \{mf, fmf, fmfm\}$$

由右分解而得的四個陪集，代表着四條父系線，故

羣 G_4^3 用 m- 循環羣 (H_5) 爲模的右分解，得代表四條父系線的陪集。

以 $H_6 = \{I, fm, fmfm\}$ 爲模時，羣 G_4^3 的左分解是

$$G_4^3 = H_6 + H_6m + H_6m^2 + H_6f^2$$

$$H_6m = \{m, mf, fm^2\}$$

$$H_6m^2=\{m^2, f, fmf\}$$

$$H_6f^2=\{f^2, f^2m, f^2m^2\}$$

右分解是

$$G_4^3=H_6+mH_6+m^2H_6+fH_6$$

$$mH_6=\{m, f^2, fmf\}$$

$$m^2H_6=\{m^2, fm^2, f^2m^2\}$$

$$fH_6=\{f, mf, f^2m\}$$

以 $H_7=\{I, mf, f^2m^2\}$ 爲模時,羣 B_4^3 的左分解是

$$G_4^3=H_7+H_7m+H_7m^2+H_7f$$

$$H_7m=\{m, f^2, fmf\}$$

$$H_7m^2=\{m^2, f^2m, fmfm\}$$

$$H_7f=\{f, fm, fm^2\}$$

右分解是

$$G_4^3=H_7+mH_7+m^2H_7+f^2H_7$$

$$mH_7=\{m, fm, f^2m\}$$

$$m^2H_7=\{m^2, f, fmf\}$$

$$f^2H_7=\{f^2, fm^2, fmfm\}$$

以 $H_8=\{I, fm^2, f^2m, fmf\}$ 爲模時,羣 B_4^3 的左分解是

$$G_4^3=H_8+H_8m+H_8m^2$$

$$G_4^3=H_8+H_8f+H_8f^2$$

$$H_8m=H_8f=\{f, m, f^2m^2, fmfm\}$$

$$H_8m^2=H_8f^2=\{f^2, m^2, fm, mf\}$$

右分解是

$$G_4^3=H_8+mH_8+m^2H_8$$

$$G_4^3=H_8+fH_8+f^2H_8$$

$$mH_8=fH_8=\{f, m, f^2m^2, fmfm\}$$

$$m^2H_8=f^2H=\{f^2, m^2, fm, mf\}$$

G_4^3 以 H_8 爲模時,其左分解和右分解是相同的。

根據上面的諸例，以 Hn 爲模的左陪集和右陪集之間有一對一的對應 $Hna \leftrightarrow \bar{a}Hn$。因此，左右陪集的個數相等。我們稱之爲 Hn 於 G_4^3 之指數 (index)，用 $/G_4^3:Hn/$ 表示之。從之，H 爲有限羣 G 的子羣時，我們可得下面的等式：

$$/G/=/G: H//H/$$

(二)等價關係 (equivalence relation) 上述各陪集的元，滿足下面的三個條件：

(a) 自反性 (reflexivity) $a\sim a$

$a\bar{a}=I\in H$, 故 $a\sim a \pmod H$

(b) 對稱 (symmetry) $a\sim b \Rightarrow b\sim a$

因 $a\bar{b}\in H$, 故 $(a\bar{b})^{-1}=b\bar{a}\in H$

因此 $b\sim a \pmod H$

(c) 傳遞性 (transitivity) $a\sim b,\ b\sim c \Rightarrow a\sim c$

假設 $a\sim b,\ b\sim c \pmod H$, 卽 $a\bar{b}\in H,\ b\bar{c}\in H$,

故 $(a\bar{b})(b\bar{c})=a\bar{c}\in H$. 因此 $a\sim c \pmod H$

(三)共軛類 (conjugate classes)

對羣 G 之元 a 而言，$\bar{t}at\ (t\in G)$ 是把 a 用元 t 變換而得的元，又稱之爲 a 的共軛元。設 $b=\bar{t}at$，卽 b 與 a 共軛時，書爲 $a\sim b$，其關係具備自反性，對稱性及傳遞性，可滿足等價關係。下面試求羣 G_4^3 十二個元的共軛類。(表三)

I 用其他任何元來變換，卽 $\bar{t}\otimes I\otimes t=\bar{t}\otimes t=I$, I 的共軛元爲 I 本身。$(\bar{t}=t^{-1})$

m的共軛元，卽 $t^{-1}\cdot m\cdot t$ 有：

$I^{-1}\otimes m\otimes I=m$

$m^{-1}\otimes m\otimes m=mmmm=m\ \ (m^{-1}=mm)$

$(m^2)^{-1}\otimes m\otimes m^2=mmmm=m\ \ (m^2)^{-1}=m$

$f^{-1}\otimes m\otimes f=ffmf=mmff=fmfm\ \ (f^2m=m^2f,\ m^2f^2=fmfm)$

$(fm)^{-1}\otimes m\otimes fm=mmffmfm=mmmmffm=fmmm=f$

$(fm^2)^{-1}\otimes m\otimes fm^2=mffmfmm=fmmmfmm=ffmm=f^2m^2$

$(f^2)^{-1}\otimes m\otimes f^2=fmff=ffmm=f^2m^2$

$(f^2m)^{-1}\otimes m\otimes f^2m=mmfmffm=mmfmmmf=mmff=fmfm$

$$(f^2m^2)^{-1} \otimes m \otimes f^2m^2 = mfmffmm = mffmmmm = fmmm = f$$

$$(fmf)^{-1} \otimes m \otimes fmf = ffmmffmfmf = ffmmmmffmf = ffmm = f^2m^2$$

$$(fmfm)^{-1} \otimes m \otimes fmfm = mmffmmffmfmfm = ffmm = f^2m^2$$

$$(mf)^{-1} \otimes m \otimes mf = ffmmmmf = ffmf = fmfm$$

Table 3. Conjugate Relations

$\bar{t}at$	e	f^2m	fm^2	fmf	f	f^2	m	m^2	fm	fmfm	mf	f^2m^2
e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e
f^2m	f^2m	f^2m	f^2m	f^2m	fmf	fm^2	fmf	fm^2	fm^2	fmf	fm^2	fmf
fm^2	fm^2	fm^2	fm^2	fm^2	f^2m	fmf	f^2m	fmf	fmf	f^2m	fmf	f^2m
fmf	fmf	fmf	fmf	fmf	fm^2	f^2m	fm^2	f^2m	f^2m	fm^2	f^2m	fm^2
f	f	f^2m^2	fmfm	m	f	f	f^2m^2	fmfm	f^2m^2	m	fmfm	fmf
f^2	f^2	mf	f	m^2	f^2	f^2	f	fm	mf	m^2	m^2	fm
m	m	fmfm	f^2m^2	f	fmfm	f^2m^2	m	m	f	f^2m^2	fmfm	f
m^2	m^2	fm	mf	f^2	fm	mf	m^2	m^2	f^2	mf	fm	f^2
fm	fm	m^2	f^2	mf	mf	m^2	f^2	mf	fm	fm	f^2	m^2
fmfm	fmfm	m	f	f^2m^2	f^2m^2	m	f	fmfm	fmfm	fmfm	f	m
mf	mf	f^2	m^2	fm	f^2	fm	fm	f^2	m^2	f^2	mf	mf
f^2m^2	f^2m^2	f	m	fmfm	m	fmfm	fmfm	f	m	f	f^2m^2	f^2m^2

m的共軛元爲 m, f, f^2m^2, fmfm，卽這四元構成一共軛類。如此求下去，卽表三所示，我們可得下面的共軛類 (K)：

$$K_1 = \{I\}$$

$$K_2 = \{f^2m, fmf, fm^2\}$$

$$K_3 = \{f^2, fm, mf, m^2\}$$

$$K_4 = \{f, m, f^2m^2, fmfm\}$$

共軛類有一個共同的特徵，卽共軛的元都屬於同一世代，然而各屬於不同的父系或母系線。

跟羣 G_4^3 的元 a 可換的所有的元的集合我們稱之爲 a 的中心化羣 (centralizer)，用 C(a) 來表示之。

$$C(a) = \{x \in G_4^3 / xa = ax\}$$

a 的中心化羣 C(a) 爲羣 G_4^3 的子羣之一。設x, y, ∈ C(a)，卽

$$xya = xay = axy$$

從之得 $xy\in C(a)$。同時 $xa=ax$ 的兩邊左右乘 $\bar{x}$，得

$$\bar{x}xa\bar{x}=\bar{x}ax\bar{x},\quad a\bar{x}=\bar{x}a$$

x 的反元 $\bar{x}$ 也是 $C(a)$ 的一元：$\bar{x}\in C(a)$。

羣 G_4^3 的元 a 之共軛元和 G_4^3 以 $C(a)$ 爲模而得的左陪集之間有一對一的對應。尤其是 a 的共軛元的個數有限時，其個數和 $C(a)$ 的指數 $/G_4^3: C(a)/$ 相等。

羣 G 爲位數 g 的有限羣時，其共軛類 $K_1=I, K_2, \cdots K_k$

的完全代表系爲

$$a_1=I,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$$

時，共軛類 K_i 的元的個數 h_i 相等於 $/G: C(a_i)/$。同時 h_i 爲 G 的位數的約數，並可成立下面的等式

$$g=1+h_2+\cdots+h_k\quad (h_1=1)$$

我們稱之爲羣的類等式。

羣 G_4^3 的位數 $g=12$，故其類等式爲

$$12=1+3+4+4$$

(四)正規子羣 (normal subgroup)

對羣 G 的部分集合 S 而言，$\bar{t}St=\{\bar{t}st/s\in S\}$ 爲把 S 用 t 變換而得的部分集合，或稱 S 的共軛部份集合。若 S 爲 G 的子羣時，$\bar{t}St$ 也是 G 的子羣，稱之爲 G 的共軛子羣。設 $a, b\in S$，那麼 $a\bar{b}\in S$，故

$$(\bar{t}at)(\bar{t}bt)^{-1}=\bar{t}at\bar{t}bt=\bar{t}(a\bar{b})t\in\bar{t}St$$

卽 $\bar{t}St$ 也成爲 G 的子羣。

羣 G 的子羣 N 之共軛子羣只有 N 而且對 G 的任意元 t 可成立下式時，

$$\bar{t}Nt=N$$

稱 N 爲 G 的正規子羣。又，從上式可得

$$Nt=tN$$

因此 N 的左陪集和右陪集相一致，我們可簡稱之爲陪集。N 爲 G 的正規子羣時，可用下面的記號表示之。

$$G\triangleright N\ \text{或}\ N\triangleleft G$$

G 及 $\{I\}$ 爲 G 的自明的正規子羣，若除此而無其他正規子羣存在時，我們稱 G 爲單純羣。

羣 G_4^3 的八組眞子羣中，只有以四個個自反元所組成的子羣，

$$H_8=\{I, fm^2, f^2m, fmf\}$$

一組的元構成共軛類，卽本身和其共軛子羣相同，故我們稱子羣 $H_8=\{I, fm^2, f^2m, fmf\}$ 爲羣 G_4^3 的正規子羣。又，G_4^3 以正規子羣爲模的左分解和右分解爲：

$$\begin{aligned} G_4^3 &= H_8+H_{8m}+H_{8m^2} \\ &= H_8+H_{8f}+H_{8f^2} \\ &= H_8+mH_8+m^2H_8 \\ &= H_8+fH_8+f^2H_8 \end{aligned}$$

$$H_8m=H_8f=mH_8=fH_8=\{f, m, f^2m^2, fmfm\}$$

$$H_8m^2=H_8f^2=m^2H_8=f^2H_8=\{f^2, m^2, fm, mf\}$$

卽得相同陪集之和。

(五)因子羣 (factor group)

設 N 爲羣 G 的正規子羣。N 的二組陪集 Na 和 Nb 之積

$$(Na)(Nb)=NaN\bar{a}ab=NNab=N(ab)$$

爲包含元 ab 的陪集。

若設由 N 而產生的所有陪集的集合爲 $\overline{G}=\{Na/a\in G\}$，二組陪集的積爲

$$(Na)(Nb)=N(ab)$$

時，$\overline{G}$ 成爲以此積爲二項運算的羣。卽以 $NI=N$ 爲單位元，Na 的反元爲 $N\bar{a}$。我們稱 $\overline{G}$ 爲 G 由正規子羣 N 所產生的因子羣，用 G/N 來表示。

羣 G_4^3 由正規子羣 H_8 產生的右分解爲

$$G_4^3=H_8+H_8m+H_8m^2$$

其陪集的集合爲羣 G_4^3 的因子羣：

$$\begin{aligned} G_4^3/H_8 &= \{H_8, H_8m, H_8m^2\} \\ &= \{(I, fm^2, f^2m, fmf), (f, m, f^2m^2, fmfm), \\ &\quad (f^2, m^2, fm, mf)\} \end{aligned}$$

其中，以 H_8 爲單位元，單個構成自反元，其餘兩個構成正反對 (H_8m, H_8m^2)。三個元的運算⊗可得

$$H_8m \otimes H_8m^2 = H_8m^2 \otimes H_8m = H_8$$
$$H_8m \otimes H_8 = H_8 \otimes H_8m = H_8m$$
$$H_8m^2 \otimes H_8 = H_8 \otimes H_8m^2 = H_8m^2$$

下面，以各陪集元所包含的分節元來檢驗之。

H_8m 的元 f^2m^2 和 H_8m^2 的元 fm 的積(參照表一)爲

$$f^2m^2 \otimes fm = fm^2$$
$$fm \otimes f^2m^2 = f^2m$$

fm^2, f^2m 均屬於 H_8 的元，故

$$H_8m \otimes H_8m^2 = H_8m^2 \otimes H_8m = H_8$$

同理，

$$f^2m^2 \otimes fm^2 = f$$
$$fm^2 \otimes f^2m^2 = fmfm$$

f, $fmfm$ 均屬於 H_8m 的元，故

$$H_8m \otimes H_8 = H_8 \otimes H_8m = H_8m$$
$$fm \otimes f^2m = f^2$$
$$f^2m \otimes fm = mf$$

f^2, mf 均屬於 H_8m^2 的元，故

$$H_8m^2 \otimes H_8 = H_8 \otimes H_8m^2 = H_8m^2$$

總而言之，本羣的元的運算可滿足(1)內運算(2)交換律之外，也可滿足(3)結合律，又具有(4)單位元(5)有反元的存在等羣性質，故可稱因子羣 G_4^3/H_8 爲秩爲 3 的可換羣(Abelian group)。

(六)交換子羣 (commutator group)

茲有二元 a, b 屬於羣 G 時，稱 $\bar{a}\bar{b}ab$ 爲 a 和 b 的交換子，用 [a, b] 表示之。若

$$\bar{a}\bar{b}ab = I \Leftrightarrow \bar{a}ab = a \Leftrightarrow ab = ba$$

故 a 和 b 爲可換的必要而充分的條件爲交換子 $\bar{a}\bar{b}ab$ 相等於單位元 I。

對羣 G 的二組子羣 A, B 而言，由 A 的元 a 和 B 的元 b 的交換子 [a, b] 的全體所生成的子羣寫成 [A, B]，稱之爲 A 和 B 的交換子羣，若 [A, B]={I} 時，A 的任意的元和 B 的任意元都有可換關係。A, B 爲 G 的正規子羣時，[A, B] 又成爲 G 的正規子羣，$[A, B] \subset A \cap B$。又，$A \cap B = \{I\}$ 時，A 和 B 的各元有可換關係。尤其羣 G 和 G本身的交換子羣 [G, G] 特別寫成 D(G)，稱之爲 G 的交換子羣。

表四表示由羣 G_4^3 各二元所產生的交換子，由此我們可得 B_4^3 的交換子羣 $D(G_4^3)$ 爲

$$D(G_4^3)=\{I,\ f^2m,\ fm^2,\ fmf\}$$

羣 G_4^3 的交換子羣 $D(G_4^3)$ 爲 G_4^3 的正規子羣 G_4^3/H_8。

Table 4. Commutator Relations

$\bar{a}\bar{b}ab$	e	f^2m (m^2f)	fm^2 (mf^2)	fmf	f	f^2	m	m^2	fm	fmfm	mf	f^2m^2
e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e
f^2m	e	e	e	e	mf^2	fmf	fm^2	fmf	fmf	fm^2	fmf	fm^2
mf^2	e	e	e	e	mf^2	fmf	fm^2	fmf	fmf	fm^2	fmf	fm^2
fm^2	e	e	e	e	fmf	m^2f	fmf	f^2m	f^2m	fmf	m^2f	fmf
fmf	e	e	e	e	f^2m	fm^2	m^2f	mf^2	fm^2	f^2m	mf^2	f^2m
f	e	fm^2	fmf	m^2f	e	e	fm^2	fmf	fm^2	f^2m	m^2f	fmf
f^2	e	fmf	f^2m	mf^2	e	e	fmf	f^2m	fmf	fm^2	mf^2	f^2m
m	e	mf^2	fmf	m^2f	mf^2	fmf	e	e	f^2m	fmf	mf^2	f^2m
m^2	e	fmf	m^2f	mf^2	fmf	m^2f	e	e	fm^2	m^2f	fmf	fm^2
fm	e	fmf	f^2m	fm^2	mf^2	fmf	f^2m	mf^2	e	e	m^2f	fmf
fmfm	e	fm^2	fmf	m^2f	f^2m	fm^2	fmf	f^2m	e	e	fmf	fm^2
mf	e	fmf	f^2m	mf^2	f^2m	fm^2	fm^2	fmf	f^2m	fmf	e	e
f^2m^2	e	fm^2	fmf	m^2f	fmf	m^2f	m^2f	fm^2	fmf	fm^2	e	e

三 結論

綜合上面二節的分析及討論，我們可得

1. Kokata 親屬制的連婚圈由四個父系繼嗣羣所組成，各單位之間有秩序的輪流舉行雙方交表婚，而所產生的分節構成秩爲12的不可交換羣 (G_4^3)：

$$G_4^3=\{I,\ f^2m,\ fm^2,\ fmf,\ f,\ f^2,\ m,\ m^2,\ fm,\ fmfm,\ mf,\ f^2m^2\}$$

2. 其羣論關係式爲

(1) $m^3=I$ (patri-cycle)

(2) $f^3=I$ (matri-cycle)

(3) $(fm^2)^2=(mf^2)^2=I$ (marriage relations)

3. 十二個分節元由四個自反元 (self-inverse) 及四組正反對 (inverse pair) 所構成；前者爲 $I,\ f^2m,\ fm^2\ fmf$，後者爲 (f, f^2), (m, m^2), $(fm, fmfm)$, (mf, f^2m^2)。

4. 單位元和其他任何一組的正反對，自反元及與所有的自反元的集合，都可構成子羣 (subgroup)：

$H_0=\{I\}$ $H_5=\{I, m, m^2\}$

$H_1=\{I, f^2m\}$ $H_6=\{I, fm, fmfm\}$

$H_2=\{I, fmf\}$ $H_7=\{I, mf, f^2m^2\}$

$H_3=\{I, fm^2\}$ $H_8=\{I, f^2m, fmf, fm^2\}$

$H_4=\{I, f, f^2\}$

羣 G_4^3 的另一子羣爲所有的自反元和正反對的集合，

$$H_9=\{I, f^2m, fm^2, fmf, f, f^2, m, m^2, fm, fmfm, mf, f^2m^2\}$$

以上十個子羣中，H_9 和 G_4^3 相同，H_0 爲單位元單獨組成者；除這些以外的八個子羣，稱爲羣 G_4^3 的眞子羣。

5. H_4 和 H_5 各構成以秩爲 3 的循環羣 (cyclic group)。我們稱前者爲 p- 循環羣，後者爲 m- 循環羣。

6. 羣 G_4^3 以各眞子羣爲模數所得的左分解和右分解，其間有一對一對應。其中以 p-循環羣爲模數所得的右分解，代表四條母系線的陪集 (coset)，以 m- 循環羣爲模數所得的左分解，代表四條父系線的陪集。

7. 羣 G_4^3 以子羣 H_8 爲模數時，所得的左分解和右分解相同。

8. 羣 G_4^3 的共軛類 (conjugate classes) 爲

$K_1=\{I\}$

$K_2=\{f^2m, fmf, fm^2\}$

$K_3=\{f^2, fm, mf, m^2\}$

$K_4=\{f, m, fmfm, f^2m^2\}$

除了單位元自成一類以外，同一類的共軛元均由屬於同一世代的分節元所組成。

9. 子羣 H_8 爲羣 G_4^3 的正規子羣。因爲八個眞子羣中，只有由四個自反元所組成的 H_8 本身和其共軛子羣相等。

10. 羣 G_4^3 的因子羣 (factor group) 爲 G_4^3 由其正規子羣爲模數所得的陪集的集合。

11. 羣 G_4^3 的交換子羣 (commutator group) 爲 G_4^3 的正規子羣。

參考書目

劉斌雄

1976 雙方交表婚制的數理結構，中央研究院民族學研究所集刊。41：1-23。

ELKIN, A. P.

1939 Kinship in South Australia, *Oceania* **10**(2): 226-234.

BULLETIN OF THE
INSTITUTE OF ETHNOLOGY
ACADEMIA SINICA
Number 43 pp. 1–21 1977 (Spring)

KOKATA KINSHIP

A MATHEMATICAL ANALYSIS

(ABSTRACT)

PIN-HSIUNG LIU

From Elkin's diagram we deduce that the Kokata tribe practices bilateral cross-cousin marriage in a connubium of four hordes with three segments in each one and that the defining relations for the corresponding group of twelve elements may be given by $m^3=f^3=(fm^2)^2=I$. There are four self-inverse elements I, f^2m, fm^2, fmf and four inverge pairs (f, f^2), (m, m^2) (fm, fmfm), (mf, f^2m^2). The right-cosets of the cyclic subgroup (I, f, f^2) are the four matrilines and the left-cosets of (I, m, m^2) are the four patrilines. The three conjugate classes represent the three generations. The four self-inverse elements (i. e. ego's generation) form a normal subgroup (the commutator subgroup) which isomorphic to the Klein four-group, i. e. to the Kariera system. The corresponding factor group consists of the three generations.